



مفاهیم اولیه و نمایش‌های مختلف تابع، تعریف و مقدار تابع

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

۱ در کدام یک از رابطه‌های زیر y تابعی از x است؟

① $x - y^2 = 4$ ② $y - x^2 = 4$ ③ $|y - 1| - 2x = 0$ ④ $x^2 y = 0$

۲ اگر $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x, & x \geq 2 \\ 1 + \sin x, & x < 2 \end{cases}$ باشد، آن گاه حاصل $f(\pi f(\frac{\pi}{2}))$ کدام است؟

① -۱ ② صفر ③ ۱ ④ ۲ منبع قلم چی - ۱۳۹۶

۳ اگر رابطه $f = \{(2, a), (a, a^2 - 2), (a, 3a - 4), (a^3 - 6, b)\}$ یک تابع باشد، حاصل

$a^2 - b^2$ کدام می‌تواند باشد؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

① ۴ ② ۳ ③ ۲ ④ ۱

۴ تابع $f = \{(2b, 1), (a + c, a - b), (0, b), (d, c), (0, d - b)\}$ دو عضو دارد. $a + b$

کدام است؟ $(a, b > 0)$ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

① ۲ ② ۳ ③ ۴ ④ ۵

۵ در کره‌ای به شعاع ۳، استوانه قائمی با ارتفاع h محاط شده است. تابع حجم استوانه بر حسب h کدام

است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

① $V = \pi(6 - h^2)h$ ② $V = \pi(6 - h)h^2$ ③ $V = \pi(9 - \frac{h^2}{4})h$ ④ $V = \pi(9 - \frac{h}{4})h^2$



منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۶ در کدام یک از معادلات زیر، y تابعی از x است؟

$$\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = 1 \quad (۱)$$

$$y^2 + x^3 = -1 \quad (۲)$$

$$|y| + x^2 + 1 = 2x \quad (۳)$$

$$y = \begin{cases} x+2 & x \geq 0 \\ x-1 & x \leq 0 \end{cases} \quad (۴)$$

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

۷ در کدام یک از روابط زیر y تابعی از x است؟

$$(-1)^x + (-1)^y = 2 \quad (۱)$$

$$y^3 - y = x \quad (۲)$$

$$y = \begin{cases} 3x-1 & x \geq 1 \\ x+2 & x < 2 \end{cases} \quad (۳)$$

$$|y-1| + |x-3| = 0 \quad (۴)$$

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۸ در کدامیک از رابطه‌های زیر y تابعی از x نیست؟

$$|y| = \sqrt{x} \pm \sqrt{-x} \quad (\text{ب}) \quad |y^2 - 1| + (1 - x^4) = 0 \quad (\text{الف})$$

$$|x| + |y| = 0 \quad (\text{د}) \quad |x| - |y| = 0 \quad (\text{ج})$$

$$(۴) \text{ الف و د}$$

$$(۳) \text{ الف و ج}$$

$$(۲) \text{ ب و ج}$$

$$(۱) \text{ الف و ب و ج}$$

۹ چه تعداد از رابطه‌های زیر نمی‌توانند تابع باشند؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

(الف) رابطه‌ای که به هر فرد نوشیدنی مورد علاقه او را نسبت می‌دهد.

(ب) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشه دوم آن عدد را نسبت می‌دهد.

(پ) رابطه‌ای که به هر عدد صحیح مخالف صفر که در نامعادله $x^2 - 4 < 0$ صدق کند، مقسوم‌علیه‌های طبیعی آن عدد را نسبت می‌دهد.(ث) رابطه‌ای که دامنه آن، اعداد صحیح مجموعه جواب نامعادله $|x-1| < 1$ و برد آن، اعداد طبیعی مجموعه جواب نامعادله $2x^2 - 18 < 0$ است.

$$(۴) ۴$$

$$(۳) ۳$$

$$(۲) ۲$$

$$(۱) ۱$$

۱۰ به ازای کدام مقدار k ، رابطه‌ی $f = \{(-1, 3k), (2+k, 5), (-1, -9), (6, k)\}$ یک تابع است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۴

$$(۴) \text{ هیچ مقدار } k$$

$$(۳) k = -9$$

$$(۲) k = -3$$

$$(۱) k = -1$$



۱۱ در تابع درجه سوم $f(x) = -x^3 + ax^2 + x + 2$ رابطه $f(\frac{3}{2}) - f(2) + f(-\frac{3}{2}) = 5$ برقرار است. مقدار $f(1) + f(2)$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۳۲ (۴)

-۱۶ (۳)

-۳۲ (۲)

۱۶ (۱)

۱۲ شکل زیر، نشانگر یک ماشین است که ورودی‌هایی را تحویل گرفته و متناظراً خروجی‌هایی را تحویل داده است. اگر این ماشین یک تابع باشد، حداکثر مقدار ممکن برای ab کدام است؟

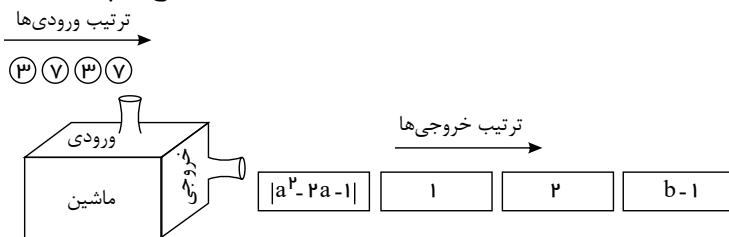
منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۲ (۱)

۴ (۲)

۶ (۳)

۸ (۴)



۱۳ تابع $f(x) = \begin{cases} 2mx - x^2 & x \leq 1 \\ -2x^3 + 3mx & x \geq 1 \end{cases}$ مفروض است. مقدار $f(1 - \sqrt{2})$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

 $4\sqrt{2}$ (۴)

-۱ (۳)

۱ (۲)

 $4\sqrt{2} - 1$ (۱)

۱۴ با ۱۲۰ متر نرده یک ناحیه از زمین را به شکل یک مثلث متساوی‌الساقین با قاعده a محصور کرده‌ایم. ضابطه‌ی تابعی که مساحت مثلث را برحسب قاعده آن بیان می‌کند، کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۹

$$S(a) = \sqrt{900a^2 - 30a^3} \quad (۲)$$

$$S(a) = \sqrt{900a^2 - 15a^3} \quad (۱)$$

$$S(a) = \sqrt{900a^3 - 30a^2} \quad (۴)$$

$$S(a) = \sqrt{900a^3 - 15a^2} \quad (۳)$$

دامنه و برد توابع

۱۵ برد تابع $f(x) = \frac{[x]}{\sqrt{x - x^2}}$ شامل چند عدد صحیح است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۳ (۴)

۲ (۳)

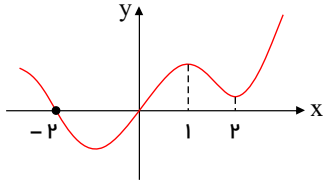
۱ (۲)

صفر (۱)



۱۶) اگر تابع $y = f(x)$ به صورت روبه‌رو باشد، دامنه‌ی تعریف تابع $y = x \sqrt{\frac{1}{-f(x)}}$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۵



(۰, +∞) ۲

(−∞, ۰) ۱

(−۲, ۰) ۴

(−∞, −۲) ∪ (۰, +∞) ۳

۱۷) اگر دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + ax + 1}$ همه‌ی اعداد حقیقی باشد، a چند مقدار صحیح را می‌تواند

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

پذیرد؟

۴ ۴

۳ ۳

۲ ۲

۱ ۱

۱۸) اگر تابع $f(x) = \frac{1-x}{(m-1)x^2 + 3x + 1}$ تنها به‌ازای یک مقدار x قابل تعریف نباشد، m چند

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

مقدار می‌تواند اختیار کند؟

هیچ مقدار ۴

۳ ۳

۲ ۲

۱ ۱

۱۹) برد تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + 1$ شامل چند عدد طبیعی نمی‌شود؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

۴ ۴

۳ ۳

۲ ۲

۱ ۱

۲۰) دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{25}}(x-3)}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۶

بی‌شمار ۴

۳ ۳

۲ ۲

۱ ۱

۲۱) اگر عبارت $\sqrt[4]{\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2}} + \sqrt[3]{2x - x^2}$ عدد حقیقی باشد، مجموعه مقادیر x در کدام بازه

خارج از کشور - ۱۳۹۶

است؟

 $[-\frac{2}{3}, ۰) \cup (۰, \frac{2}{3}]$ ۴ $[-\frac{2}{3}, ۰) \cup (۰, ۲]$ ۳ $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ ۲ $[\frac{2}{3}, ۲]$ ۱



۲۲) عبارت $\frac{1}{\sqrt{\log_2^x}}$ در کدام بازه قابل تعریف است؟ $[\quad]$ ، نماد جزء صحیح است. منبع قلم چی - ۱۳۹۷

- ۱) $(0, 1)$ ۲) $(1, 2)$ ۳) $(1, 5, 2, 5)$ ۴) $(2, 5, 3, 5)$

۲۳) اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{x^2 - 8x - b + 1}{x^2 + ax - 1}$ به صورت $D_f = \mathbb{R} - \{5, b\}$ و $f(c) = 1$ باشد، آن گاه c کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱) $2, 6$ ۲) $-2, 6$ ۳) $2, 4$ ۴) $-2, 4$

۲۴) دو تابع $f(x) = \frac{b}{x+3}$ و $g(x) = \frac{x-a}{x^2+cx+d}$ برابرند. حاصل $\frac{abc}{d}$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱) -1 ۲) -2 ۳) 1 ۴) 2

۲۵) به ازای چه مقادیری از m ، دامنه تابع $f(x) = \frac{x+1}{(m-1)x^2 + (2m-1)x - 1}$ مجموعه

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

اعداد حقیقی است؟

- ۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2} < m < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq m \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $-\frac{\sqrt{3}}{2} < m < \frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq m \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

۲۶) اگر تابع $f(x) = \frac{2x+7}{mx^2-6x+n}$ به ازای مجموعه مقادیر $R - \{\frac{1}{2}, 1\}$ قابل تعریف باشد،

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

$f(-\frac{1}{2})$ کدام است؟ $(m, n \in R)$

- ۱) 2 ۲) -2 ۳) 1 ۴) -1

۲۷) اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{[\frac{x}{2}] - 1}$ به صورت $[a, b]$ باشد، بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

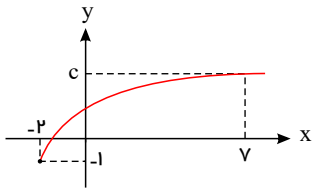
$[\quad]$ ، نماد جزء صحیح است.

- ۱) 2 ۲) 3 ۳) 4 ۴) 5



۲۸) نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x+a} + b$ به صورت مقابل است. $a + b + c$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸



۳ (۲)

۵ (۴)

۲ (۱)

۴ (۳)

۲۹) اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{x}{2x^2 + ax + b}$ به صورت $\mathbb{R} - \{3\}$ باشد، $a - b$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸ -۶ (۴)

۶ (۳)

۳۰ (۲)

-۳۰ (۱)

۳۰) اگر $f(x) = 3^x - 1$ باشد، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{\frac{(x+1)f(x)}{x+2}}$ کدام است؟

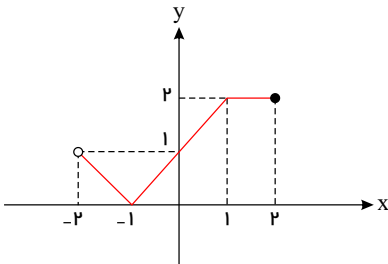
منبع قلم چی - ۱۳۹۸

$[-1, +\infty)$ (۴)

$(-\infty, -1]$ (۳) $(-2, -1] \cup [0, +\infty)$ (۲) $(-\infty, -2) \cup [-1, 0]$ (۱)

۳۱) اگر نمودار $y = f(x-1)$ به صورت مقابل باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{f(x)-1}$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۷



$[-2, -1] \cup [0, 2]$ (۱)

$[-1, 0] \cup [1, 2]$ (۲)

$(-3, -1]$ (۳)

$[-1, 1]$ (۴)

۳۲) کدام گزینه در مورد توابع $f(x) = \frac{1}{(|x|+1)|x|}$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2}}$ درست است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸ (۲) دامنه f زیرمجموعه برد g است.

(۴) دامنه g زیرمجموعه برد f است.

(۱) دامنه f زیرمجموعه برد آن است.

(۳) دامنه های f و g برابرند.



۳۳) تابع $f(x) = 3x + 2$ با دامنه $[-1, 2]$ مفروض است. اگر برد تابع f دامنه تابع

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

$g(x) = \frac{x-1}{2}$ باشد، بزرگ ترین عضو صحیح برد تابع g کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

۳۴) اگر مجموعه زیر یک تابع با دامنه و برد برابر باشد، $a + b$ کدام است؟

$$f = \{(a, -4b), (a - b, b), (b, a), (a + 2, b + 4), (a - b, a - 3)\}$$

-۲ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

-۱ (۱)

۳۵) اگر نمودار تابع $y = f(x)$ مطابق شکل روبه رو باشد، دامنه تابع $y = \log(x \cdot f(x))$ کدام است؟

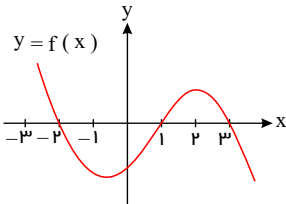
منبع قلم چی - ۱۳۹۸

$(-2, 0) \cup (1, 3)$ (۲)

$(-2, 0) \cup (3, +\infty)$ (۱)

$(-2, 1) \cup (3, +\infty)$ (۴)

$(-\infty, -2) \cup (1, 3)$ (۳)



۳۶) اگر دامنه تابع به معادله $f(x) = \frac{2x^2 + 5}{x^2 + 2(a+1)x + 9a - 5}$ تمامی اعداد حقیقی باشد،

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

آن گاه حدود a کدام است؟

$\mathbb{R} - (1, 6)$ (۴)

$a > 6$ (۳)

$a < 1$ (۲)

$(1, 6)$ (۱)

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

۳۷) برد تابع $f(x) = |x + 1| - 4$ با دامنه $[-2, 5]$ کدام است؟

$(-5, 2)$ (۴)

$[-4, 2)$ (۳)

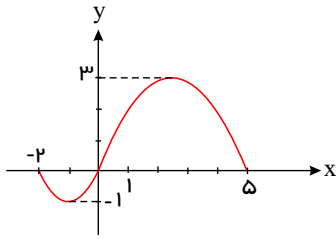
$[-2, 5)$ (۲)

$[-4, 5)$ (۱)



۳۸) اگر نمودار تابع $y = f(x+2)$ به صورت زیر باشد، دامنه عبارت $\sqrt{x f(1 - \frac{x}{2})}$ به کدام صورت است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸



۱) $\{-12, 2\} \cup [-2, 0]$

۲) $[-12, -2] \cup [0, 2]$

۳) $\{-12\} \cup [-2, 2]$

۴) $[-6, -1] \cup [0, 1]$

۳۹) دامنه تابع $f(x) = \sqrt{(a^2 - 4)x^2 + ax + 6}$ بازه $(-\infty, b]$ است. $a + b$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۱) ۴

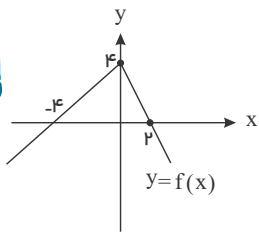
۲) -۱

۳) -۵

۴) ۵

۴۰) اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، دامنه تابع با ضابطه $g(x) = \sqrt{2 - |f(x)|}$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۷



۱) $(-\infty, -4] \cup [-2, 1]$

۲) $\cup [2, +\infty)$

۳) $(-\infty, -6] \cup [-2, 1]$

۴) $\cup [3, +\infty)$

۱) $[-4, -2] \cup [1, 2]$

۲) $[-6, -2] \cup [1, 3]$

۴۱) اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{2x^2 - 6x + a}}$ به صورت $x \in (-\infty, 1) \cup (b, +\infty)$ باشد، در این صورت $a \times b$ کدام است؟ ($b \geq 1$)

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

۱) ۱۰

۲) ۸

۳) ۶

۴) ۴

۴۲) تابع $f(x) = 3 + \sqrt{ax + b}$ با دامنه $[-2, +\infty)$ مفروض است. اگر نمودار این تابع، خط

$2y - 4x = 1$ را در نقطه‌ای روی محور y ها قطع کند، مقدار $f(a + b)$ کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۱) ۶

۲) ۷

۳) ۲

۴) ۴



تساوی دو تابع

۴۳ اگر دو تابع $f(x) = \frac{ax^3 + b}{2x^3 - c}$ و $\begin{cases} g(x) = 2 \\ D_g = \mathbb{R} - \{-1\} \end{cases}$ با هم مساوی باشند، $a + b + c$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

۱۰ ۴

۸ ۳

۶ ۲

۲ ۱

۴۴ تابع $f(x) = (x-1)\sqrt{1-x}$ با کدام یک از توابع زیر مساوی است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۱ $g(x) = \sqrt{-(1-x)^2}$ ۲ $g(x) = \sqrt{(1-x)^3}$ ۳ $g(x) = \sqrt{(x-1)^3}$ ۴ $g(x) = -\sqrt{(1-x)^3}$

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

۴۵ کدام دو تابع داده شده مساوی اند؟

۱ $g(x) = x|x+1|, f(x) = x(x+1)$ ۲ $g(x) = \frac{|x+1|}{x}, f(x) = \frac{x+1}{|x|}$

۳ $g(x) = \frac{x^2-1}{|x|+1}, f(x) = |x|-1$ ۴ $g(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{|x|}, f(x) = 1$

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

۴۶ کدام دو تابع با هم مساوی اند؟

۱ $g(x) = \sqrt{x|x|}$ و $f(x) = (\sqrt{x})^2$ ۲ $g(x) = (\sqrt{x})^2$ و $f(x) = x$

۳ $g(x) = \sqrt{|x|} \times \sqrt{|x|}$ و $f(x) = \sqrt{x|x|}$ ۴ $g(x) = (\sqrt{x})^2$ و $f(x) = \sqrt{x^2}$

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

۴۷ در کدام گزینه دو تابع برابرند؟

۱ $\begin{cases} f(x) = \tan x \cdot \cot x \\ g(x) = 1 \end{cases}$ ۲ $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{|x|} \\ g(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x} \end{cases}$

۳ $\begin{cases} f(x) = \log x^2 \\ g(x) = 2 \log x \end{cases}$ ۴ $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{x} \\ g(x) = |x| \end{cases}$

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

برابر باشند، $c + d$ کدام است؟

- ۱ (۴) ۲ (۳) -۱ (۲) صفر (۱)

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{r - x^r} \\ g(x) = \sqrt{r + x} \times \sqrt{r - x} \end{array} \right. \quad (2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{x + r} \\ g(x) = \frac{x - r}{x^r - r} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = [x]^{\mathfrak{r}} \\ g(x) = [x]^{\mathfrak{r}} \end{array} \right. \quad \textcircled{\mathfrak{F}} \qquad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x^{\mathfrak{r}} - \mathfrak{d}x + \mathfrak{e}} \\ g(x) = \sqrt{x - \mathfrak{r}} \times \sqrt{x - \mathfrak{r}} \end{array} \right. \quad \textcircled{\mathfrak{Y}}$$

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

۵۰ کدامیک از توابع زیر با تابع $f(x) = \sqrt{[x] + [-x]}$ مساوی است؟

همه موارد ۴ $y = \sqrt{-\sin^2 \pi x}$ ۳ $y = \frac{1}{[x] + [-x] + 1}$ ۲ $y = 0$ ۱

۵۱) اگر توابع $f(x) = \sqrt{(x-a)^2(x-b)}$ و $g(x) = |x-a|\sqrt{x+2}$ با هم برابر باشند،

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

مقدار $a + b$ کدام می‌تواند باشد؟

- $$-9 \quad -7 \quad -5 \quad -3$$

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۵۲) در کدام گزینه، توابع f و g مساوی نیستند؟

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-1} \\ g(x) = \sqrt{1-x} \times \sqrt{x-1} \end{array} \right. \quad (2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{\sqrt{x^r}}{\sqrt[r]{x^r}} \\ g(x) = \frac{x}{|x|} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{x}{x^{\mathfrak{r}}} \\ g(x) = \frac{x^{\mathfrak{r}}}{x^{\mathfrak{r}}} \end{array} \right. \quad \textcircled{\mathfrak{F}} \qquad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x^{\mathfrak{r}} - x} \\ g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x - 1} \end{array} \right. \quad \textcircled{\mathfrak{Y}}$$



انتقال توابع

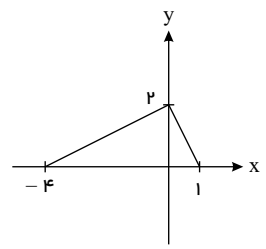
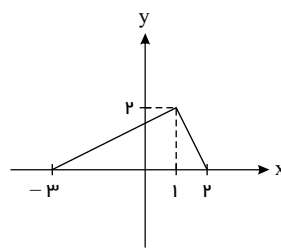
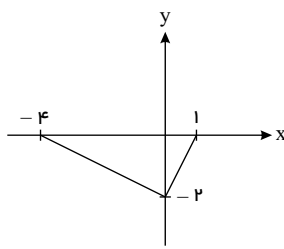
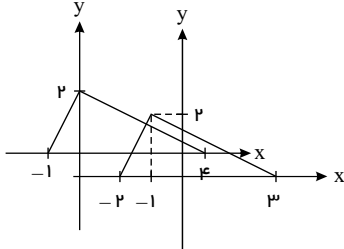
۵۳) اگر نمودار تابع $y = f\left(\frac{1+x}{2}\right)$ به صورت زیر باشد، نمودار تابع $y = f\left(\frac{1-x}{2}\right)$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

۴

۳

۲



۱

۵۴) دامنه تابع $g(x) = f(2x - 1)$ بازه $[-1, 3]$ است. دامنه تابع $h(x) = f(3x + 2)$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۴ $\left[-\frac{5}{3}, 1\right]$ ۳ $\left[-\frac{5}{3}, 2\right]$ ۲ $[0, 8]$ ۱ $[0, 2]$

۵۵) نمودار تابع $y = f(2x - 1)$ را یک واحد به چپ منتقل کرده، سپس آن را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم و طول نقاط روی نمودار را دو برابر می‌کنیم. ضابطه تابعی که نمودار آن به دست آمده کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

۴ $y = f(3 - 4x)$ ۳ $y = f(-x)$ ۲ $y = f(2 - x)$ ۱ $y = f(1 - x)$

۵۶) قرینه نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف x های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیه اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

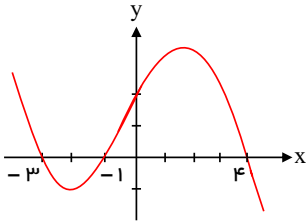
خارج از کشور - ۱۳۹۷

۴ $1,5$ ۳ 1 ۲ $0,5$ ۱ -2



۵۷) شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = f(x - 2)$ است: دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $\sqrt{x f(x)}$ ، کدام

خارج از کشور - ۱۳۹۴



است؟

۱) $[-1, 1] \cup [0, 6]$

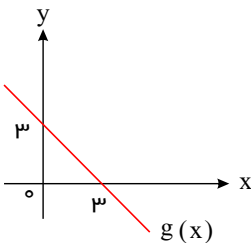
۲) $[-3, 1] \cup [0, 2]$

۳) $[-5, -3] \cup [-1, 2]$

۴) $[-5, -3] \cup [0, 2]$

۵۸) نمودار $g(x) = f(x) - 2$ به صورت مقابل است. مساحت ناحیه محدود به نمودار

منبع قلم چی - ۱۳۹۸



۱) ۱۵

۲) ۱۲

۳) ۱۸

۴) ۲۷

۵۹) نقطه $A(-1, 3)$ روی نمودار تابع $f(x)$ و نقطه متناظر با آن یعنی $A'(a, b)$ روی نمودار تابع

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

$y = 3f(2x - 5) - 7$ قرار دارد. $a - b$ کدام است؟

۴) ۴

۳) ۲

۲) صفر

۱) -۲

۶۰) با اعمال موارد کدام گزینه به ترتیب، نمودار تابع $y = f(x)$ تبدیل به نمودار تابع

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

$y = -\frac{1}{4}f(1 - x)$ می‌شود؟

۱) انتقال یک واحد به راست، انعکاس نسبت به محور x ها و y ها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای افقی

۲) انتقال یک واحد به چپ، انعکاس نسبت به محور x ها و y ها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای عمودی

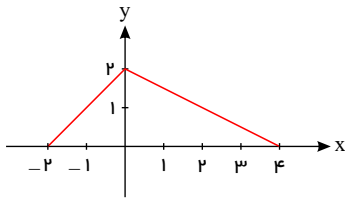
۳) انتقال یک واحد به چپ، انعکاس نسبت به محور x ها و y ها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای افقی

۴) انتقال یک واحد به راست، انعکاس نسبت به محور x ها و y ها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای عمودی



۶۱) اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، مساحت محصور بین نمودار تابع

منبع قلم چی - ۱۳۹۸



$y = f(x - |x|)$ ، محور x ها و خط $x = 5$ کدام است؟

۱۱ (۲)

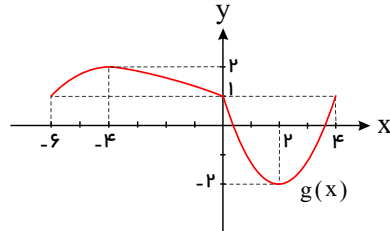
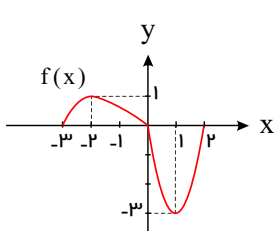
۹ (۱)

۱۰ (۴)

۸ (۳)

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۶۲) با توجه به نمودار دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ کدام رابطه صحیح است؟



(۱) $g(x) = f\left(\frac{x+2}{2}\right)$

(۲) $g(x) = f(2x) + 1$

(۳) $g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + 1$

(۴) $g(x) = f(x+2) + 2$

۶۳) اگر دامنهٔ تعریف تابع $y = f(2-x)$ بازهٔ $[-1, 2]$ باشد، دامنهٔ تعریف تابع

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

$g(x) = f(3x+4)$ کدام است؟

(۴) $[1, 2]$

(۳) $[0, 3]$

(۲) $[0, 1]$

(۱) $\left[-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right]$

۶۴) نمودار تابع $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ از کدام ناحیه (نواحی) محورهای مختصات عبور نمی کند؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

(۴) از همهٔ نواحی عبور می کند.

(۳) چهارم

(۲) دوم و چهارم

(۱) دوم

۶۵) اگر a عددی حقیقی و نمودار توابع $f(x) = (4a-2)^x$ و $g(x) = \left(1 - \frac{a}{2}\right)^x$ نسبت به محور

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

y ها قرینه هم باشند، مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

(۴) ۳

(۳) ۲٫۵

(۲) ۲

(۱) ۱٫۵



۶۶ برای رسم نمودار تابع $f(x) = \log_2(2x + 4)$ ، به ترتیب باید چه انتقال‌هایی را روی تابع

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

$y = \log_2(x - 1)$ انجام دهیم؟

۱) ۵ واحد در راستای افقی به چپ، ۲ واحد در راستای قائم به بالا

۲) ۳ واحد در راستای افقی به چپ، ۱ واحد در راستای قائم به بالا

۳) ۵ واحد در راستای افقی به راست، ۲ واحد در راستای قائم به بالا

۴) ۳ واحد در راستای افقی به راست، ۱ واحد در راستای قائم به بالا

۶۷ نمودار تابعی را ۲ واحد به سمت راست انتقال داده‌ایم و سپس قرینه شکل حاصل را نسبت به محور

x ها ۳ برابر در جهت عمودی منبسط کرده‌ایم و تابع $y = -|3x - 12|$ به دست آمده است. تابع اولیه

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

کدام بوده است؟

۴) $y = |x - 2|$

۳) $y = |x - 6|$

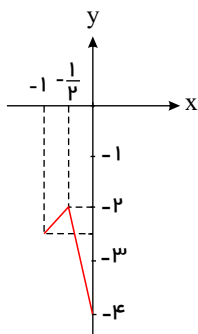
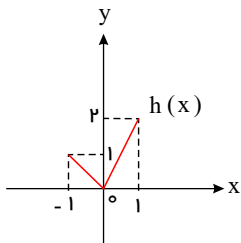
۲) $y = \frac{1}{3}|2 - x|$

۱) $y = 9|x - 6|$

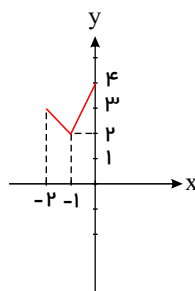
۶۸ نمودار تابع $h(x) = f(x - 1) - 2$ مطابق شکل روبه‌رو است. کدام گزینه نمودار تابع

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

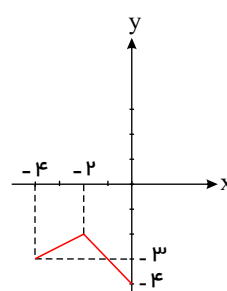
$y = -f\left(\frac{x}{2}\right)$ را به درستی نشان می‌دهد؟



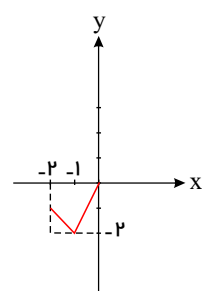
۴)



۳)



۲)



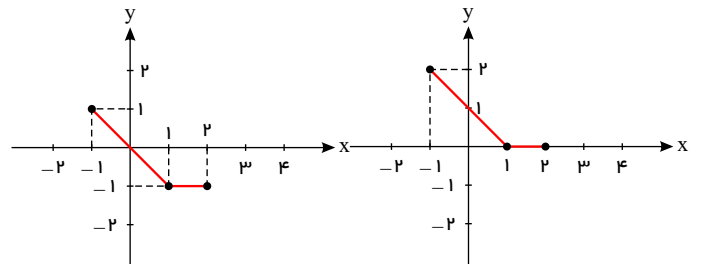
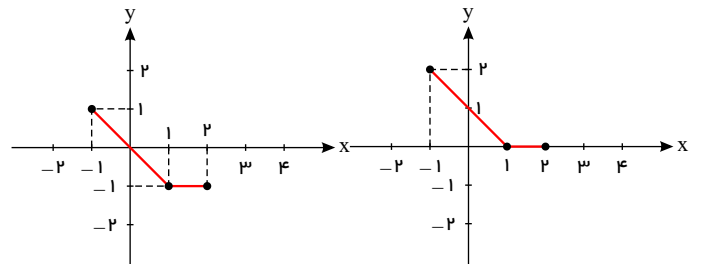
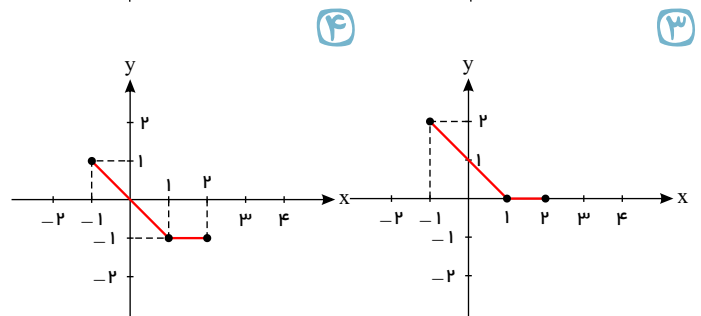
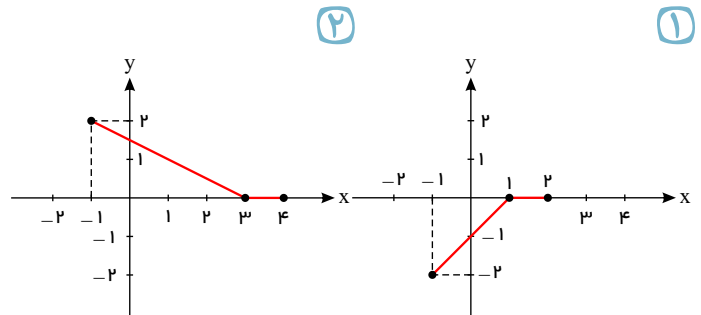
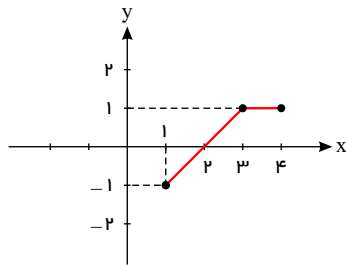
۱)



۶۹) شکل مقابل نمودار تابع $y = f(x - 2) + 1$ را نشان می‌دهد. نمودار تابع $y = -f(x)$ کدام

است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸



۷۰) نمودار تابع $y = \sqrt{1 - 2x}$ را یک واحد به چپ، سپس یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم. نمودار

جدید خط $y = x + 9$ را در نقطه $A(\alpha, \beta)$ قطع می‌کند. حاصل $\alpha + \beta$ چقدر است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۳ (۴)

-۱ (۳)

۹ (۲)

-۲۰ (۱)

۷۱) نمودار تابع $y = -x^2 + 2x + 5$ را ۳ واحد به طرف x های مثبت، سپس ۲ واحد به طرف y های

منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟ سراسری - ۱۳۹۸

(۲, ۶) (۴)

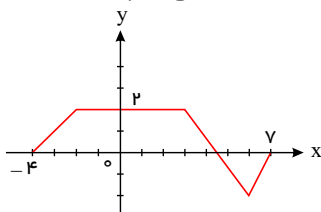
(۳, ۵) (۳)

(۲, ۵) (۲)

(۳, ۴) (۱)

۷۲) نمودار تابع f به صورت شکل زیر است. دامنه تابع $y = 2f(2x - 1)$ شامل چند عدد صحیح

منبع قلم چی - ۱۳۹۸



۶ (۳)

۱۲ (۲)

۴ (۱)

۸ (۴)

۷۳) نمودار تابع $y = f(x)$ مفروض است. اگر ابتدا نمودار را نسبت به محور y ها قرینه کنیم، سپس آن

را ۲ واحد در راستای محور x ها به طرف راست منتقل کنیم و در انتها با ضریب ۲ آن را در راستای عمودی

منبع قلم چی - ۱۳۹۸



(۷۵) نمودار تابع $y = 2|x + 1| + 3$ را ابتدا یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم؛ سپس آن را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم و در نهایت ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. مجموع طول و عرض نقاط تلاقی نمودار به دست آمده با محورهای مختصات چقدر می‌باشد؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۴ (۴)

۷ (۳)

۴ (۲)

۱ (۱)

(۷۶) اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$ و $g(x) = \sqrt{x + 2} + 1$ باشند، با کدام یک از انتقال‌های زیر نمودار $f \circ g$ بر نمودار g منطبق می‌شود؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

۹ واحد به چپ، ۱ واحد به پایین (۲)

۹ واحد به چپ، ۱ واحد به بالا (۱)

۹ واحد به راست، ۱ واحد به پایین (۴)

۹ واحد به راست، ۱ واحد به بالا (۳)

(۷۷) اگر دامنه تابع $y = f(2x - 1) + 3$ به صورت $[-2, 6]$ باشد، آنگاه دامنه تابع $g(x) = 3f(4x - 2) - 3$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

 $[-3, 1]$ (۴) $[\frac{3}{8}, \frac{11}{8}]$ (۳) $[-\frac{3}{4}, \frac{13}{4}]$ (۲) $[-1, 3]$ (۱)

(۷۸) اگر نمودار تابع $y = f(x)$ را یک واحد به راست و سپس دو واحد به پایین انتقال دهیم، نمودار تابع $g(x) = (x - 1)^2$ حاصل می‌شود. در این صورت تابع $f \circ g$ محور y ها را با چه عرضی قطع می‌کند؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۶

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(۷۹) نمودار تابع $y = \sqrt{5 - 2x} - 1$ کدام است؟

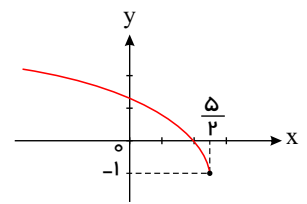
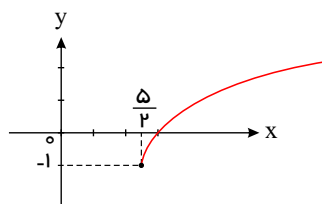
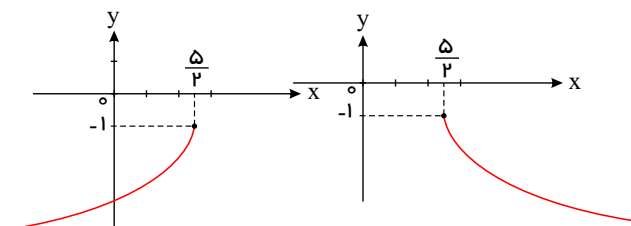
منبع قلم چی - ۱۳۹۸

(۴)

(۳)

(۲)

(۱)



(۸۰) نمودار تابع $f(x) = (x + 1)^2$ را در راستای محورهای مختصات دو واحد به راست و یک واحد به

پایین منتقل کرده ایم تا نمودار تابع $g(x)$ به دست آید. عرض نقطه تلاقی دو نمودار f و g کدام است؟

۸۱) اگر نقطه $(2x_0, y_0)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ قرار داشته باشد، کدام نقطه روی نمودار تابع

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

$$y = -2f\left(\frac{x-3}{2}\right) + y_0$$

قرار دارد؟

- ۱) $(4x_0 + 3, y_0)$ ۲) $(4x_0 + 3, -y_0)$ ۳) $\left(\frac{2x_0 - 3}{2}, -y_0\right)$ ۴) $\left(\frac{2x_0 - 3}{2}, y_0\right)$

۸۲) نمودار تابع $y = x^2 - x - 3$ را ۲ واحد به طرف x های منفی سپس ۹ واحد به طرف y های منفی

خارج از کشور - ۱۳۹۸

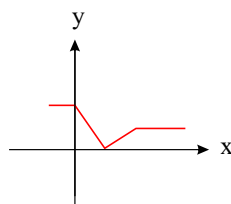
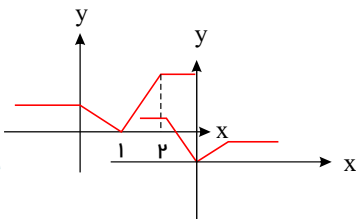
انتقال می دهیم. نمودار جدید، در کدام بازه، زیر محور x ها است؟

- ۱) $(-5, 2)$ ۲) $(-5, 3)$ ۳) $(-2, 3)$ ۴) $(-2, 5)$

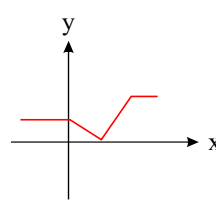
۸۳) نمودار تابع $y = f(x - 1)$ به شکل مقابل است. نمودار تابع $y = f(1 - x)$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۴

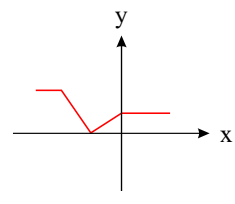
۴



۳



۲



۱

۸۴) اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد، نمودار $y = -f(-x + 1)$ کدام است؟

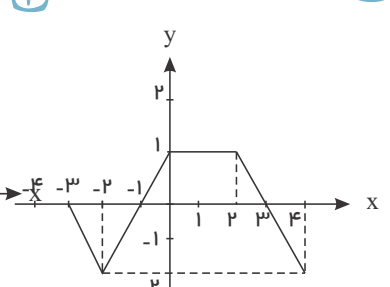
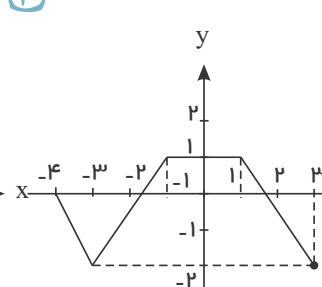
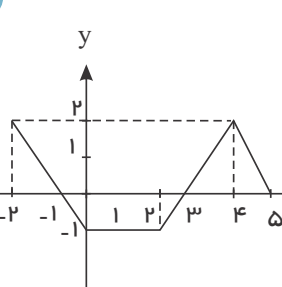
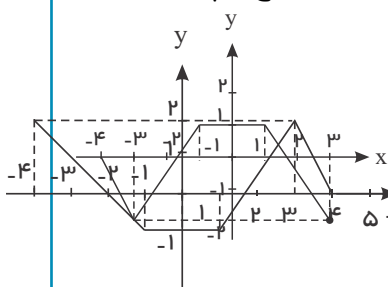
منبع قلم چی - ۱۳۹۷

۴

۳

۲

۱



۸۵) نمودار تابع $f(x) = |x - 1| - 4$ را ۲ واحد به طرف x های منفی و سپس ۳ واحد به طرف y های

مثبت انتقال می دهیم. نمودار تابع جدید در کدام بازه بالای نیمساز ربع چهارم است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

- ۱) $(-\infty, 0)$ ۲) $(-1, 1)$ ۳) $(-2, 1)$ ۴) $(0, +\infty)$

۸۶) تابع $f(x) = x^3$ مفروض است. اگر تابع $f(x)$ را ۴ واحد به پایین و دو واحد به راست منتقل کنیم،

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

تابع $g(x)$ به دست می آید. معادله $f(x) = g(x)$ چند جواب دارد؟

۱۷

۱) یک جواب مثبت



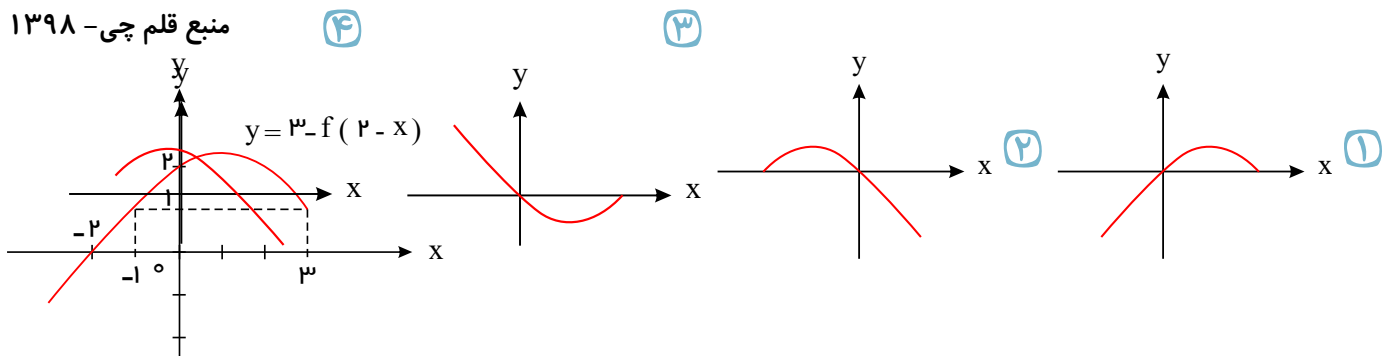
۸۷) با فرض $f(x+1) = x^2 - 3x$ ، نمودار تابع $y = f(x)$ را ۲ واحد به سمت چپ و ۴ واحد به

سمت پایین انتقال می‌دهیم. نمودار جدید محور x ها را با کدام طول‌ها قطع می‌کند؟ منبع قلم‌چی - ۱۳۹۹

- ۱) ۲ و ۳ ۲) ۲ و ۳ ۳) -۲ و صفر ۴) صفر و ۲

۸۸) با توجه به نمودار $y = 3 - f(2 - x)$ ، نمودار تابع $y = 2 - f(x + 3)$ کدام است؟

منبع قلم‌چی - ۱۳۹۸



۸۹) برای رسم نمودار $y = \sqrt{-\frac{1}{3}x + 1}$ از روی نمودار $f(x) = \sqrt{x}$ ، کدام گزینه نادرست است؟

منبع قلم‌چی - ۱۳۹۶

ابتدا نمودار f را نسبت به محور y ها انعکاس می‌دهیم، سپس آن را یک واحد به طرف راست می‌بریم و در انتها در امتداد محور x ها با ضریب ۳ انبساط می‌دهیم.

ابتدا نمودار f را یک واحد به طرف چپ می‌بریم، سپس آن را نسبت به محور y ها انعکاس می‌دهیم و در انتها در امتداد محور x ها با ضریب ۳ انبساط می‌دهیم.

ابتدا نمودار f را نسبت به محور y ها انعکاس می‌دهیم، سپس آن را در امتداد محور x ها با ضریب ۳ انبساط می‌دهیم و در انتها آن را یک واحد به طرف چپ می‌بریم.

ابتدا نمودار f را نسبت به محور y ها انعکاس می‌دهیم، سپس آن را در امتداد محور x ها با ضریب ۳ انبساط می‌دهیم و در انتها ۳ واحد به طرف راست می‌بریم.

۹۰) ابتدا قرینه نمودار تابع $f(x) = (x - 1)^2$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی

حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی کدام است؟

خارج از کشور - ۱۳۹۹

- ۱) ۰، ۲ ۲) -۱، ۱ ۳) -۱، ۲ ۴) -۲، ۱



۹۱) نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2x; (x > 1)$ مفروض است. قرینه نمودار آن نسبت به محور x ها را، ۱۶ واحد در امتداد محور y ها در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات، کدام است؟ خارج از کشور - ۱۳۹۹

- ۱) $4\sqrt{5}$ ۲) $6\sqrt{2}$ ۳) $5\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{5}$

۹۲) نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ را در امتداد محور x ها، ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور y ها، ۲ واحد در جهت مثبت، انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات، کدام است؟ سراسری - ۱۳۹۹

- ۱) $4\sqrt{15}$ ۲) $6\sqrt{7}$ ۳) $4\sqrt{17}$ ۴) $6\sqrt{10}$

۹۳) قرینه نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت راست، انتقال می‌دهیم. منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط، متقارن هستند؟ سراسری - ۱۳۹۹

- ۱) $x = 1$ ۲) $x = 1,5$ ۳) $x = 2$ ۴) $x = 2,5$

۹۴) نمودار تابع $y = 2^{|sin x|}$ را ابتدا به اندازه $\frac{\pi}{2}$ در امتداد محور x ها در جهت مثبت و سپس $\frac{3}{2}$ در امتداد محور y ها در جهت منفی انتقال می‌دهیم. تعداد محل تقاطع نمودار حاصل با محور x ها در فاصله $[0, \pi]$ کدام است؟ سراسری - ۱۴۰۰

- ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۹۵) قرینه نمودار تابع $y = 2 + \sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y = x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور x ها و ۳ واحد در جهت منفی محور y ها انتقال می‌دهیم و آن را $y = g(x)$ می‌نامیم مقدار $g(4)$ کدام است؟ سراسری - ۱۴۰۰

- ۱) ۳ ۲) -۳ ۳) -۲ ۴) -۴



اعمال جبری روی توابع

۹۶ اگر $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x+4}}$ و $g(x) = \frac{x^2-25}{\sqrt{x+4}}$ باشند، دامنه تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱ $(-4, +\infty) - \{5\}$ ۲ $\mathbb{R} - \{-5, 5\}$ ۳ $(-4, +\infty)$ ۴ $(-4, +\infty) - \{-\frac{1}{2}\}$

۹۷ اگر $g(x) = 2x + 1$ و $f \circ g(x) = 4x^2 - x - 1$ ، آن گاه $(f - g)(1)$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

- ۱ ۴ ۲ ۲ ۳ -۲ ۴ -۴

۹۸ اگر $f(x) = \sqrt{n-3x}$ و $g(x) = \sqrt{x-3m}$ و تابع $f + g$ به صورت $\{(1, a)\}$ باشد،

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

آن گاه مقدار $am + n$ کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{2}$ ۲ ۳ ۳ صفر ۴ ۱

۹۹ اگر $f + g = \{(3, 2), (4, 2), (5, -1)\}$ و $f - g = \{(3, 6), (4, 6), (5, 1)\}$ ، آن گاه

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

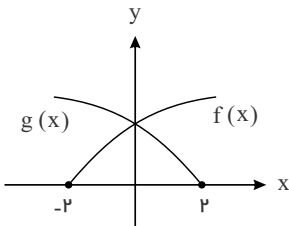
دامنه تابع $\frac{1}{f}$ شامل چند عدد حقیقی است؟

- ۱ ۳ ۲ ۲ ۳ قابل تشخیص نمی باشد. ۴

۱۰۰ نمودارهای f و g به صورت زیر است. در دامنه تابع $\frac{(f+g)(x)}{(f-g)(x)}$ چند مقدار صحیح وجود دارد؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

- ۱ بی شمار ۲ ۵ ۳ ۳ ۴ ۴



۱۰۱ f و g دو تابع درجه دوم هستند. اگر $(f+g)(x) = 4x^2 + 1$ و

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

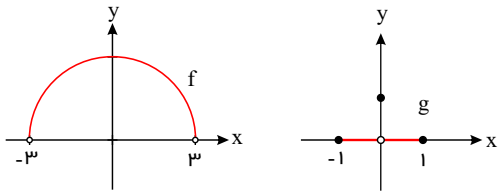
 $(f-g)(x) = 2x + 1$ باشند، $g(2)$ کدام است؟

- ۱ ۲ ۲ ۶ ۸ ۱۰



۱۰۲ اگر نمودارهای f و g به صورت زیر باشند، دامنه تابع $\frac{f}{g}$ شامل چند عدد صحیح است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸



۲ (۲)

۱ (۱)

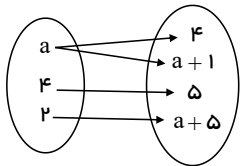
۴ (۴)

۳ (۳)

۱۰۳ نمودار ون تابع f به صورت زیر و تابع g به صورت $g = \{(x, 2x - 1) | x \in R_f\}$ است، مقدار

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

$f + g$ کدام است؟



۹ (۲)

۷ (۱)

۱۵ (۴)

۱۲ (۳)

۱۰۴ اگر f و g دو تابع خطی باشند به طوری که $\begin{cases} (f+g)(x) = 2x+1 \\ (g-f)(x) = x-2 \end{cases}$ ، حاصل $f(1) + g(3)$

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

کدام است؟

۶ (۴)

۳٫۵ (۳)

۳ (۲)

۲٫۵ (۱)

۱۰۵ اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ و $g(x) = \frac{x-2}{x-3}$ باشند، دامنه تابع $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

$\mathbb{R} - \{-1, \frac{1}{2}, 2, 3\}$ (۴)

$\mathbb{R} - \{-1, 2, 3\}$ (۳)

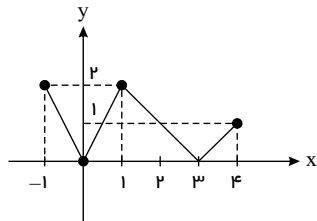
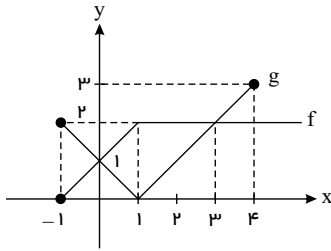
$\mathbb{R} - \{-1, \frac{1}{2}, 3\}$ (۲)

$\mathbb{R} - \{-1, 3\}$ (۱)

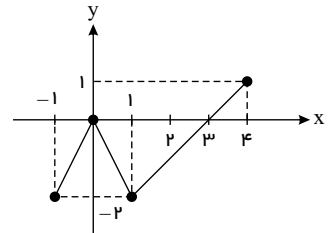
۱۰۶ نمودار توابع f و g در شکل زیر رسم شده‌اند. نمودار تابع $(g - f)(x)$ شبیه کدام یک از نمودار

های زیر است؟

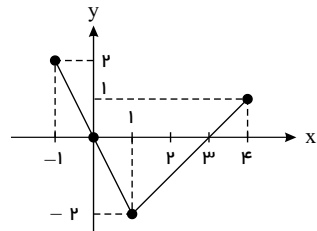
منبع قلم چی - ۱۳۹۸



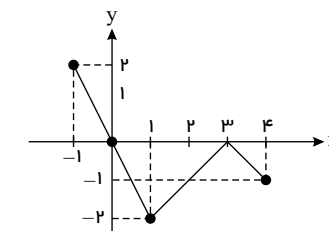
۲



۱



۴



۳

۱۰۷ اگر $f = \{(2, 1), (m^2 - m, 1), (-1, 3), (\frac{m}{2}, m + 1)\}$ تابعی یک به یک و

$g(x) = [\frac{3x}{2} + 1]$ باشد، حاصل $(f + g)(m)$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

۳/۲ ۴

۱ ۳

-1/2 ۲

۲ ۱

۱۰۸ اگر $f(x) = \begin{cases} |x| & x \geq -1 \\ -|x| & x < -1 \end{cases}$ و $g(x) = x$ چند عدد صحیح در معادله

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

$(f \cdot g)(x) = 1$ صدق می‌کند؟

۴ ۴

۳ ۳

۲ ۲

۱ ۱

۱۰۹ اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g(x) = 1 + \sqrt{x}$ باشد، آنگاه برد تابع $(g - f)(x)$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

$[0, +\infty)$ ۴

$[-1, +\infty)$ ۳

$\mathbb{R}$ ۲

$(-\infty, 1]$ ۱



۱۱۰) توابع $f = \{(-1, 4), (2, 0), (-3, \frac{3}{2})\}$ و $g = \{(0, \frac{3}{2}), (2, -1), (-1, 1)\}$ مفروض

اند. مجموع همه مؤلفه های اول و دوم زوج های مرتب تابع $\frac{1}{2}f - 3g^2$ کدام است؟ $(g \circ g = g^2)$

- ۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۱۱۱) اگر $f = \{(-2, 3), (-1, -1), (0, -\frac{2}{a})\}$ ، $g = \{(2a, 3), (0, 1), (-3, 4)\}$ و

$D_{f-g} = \{0, -1\}$ باشد، حاصل ضرب اعضای متمایز برد $2f + g$ چند برابر a است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱) -۹ ۲) ۹ ۳) ۱۸ ۴) -۱۸

۱۱۲) اگر y_1 و y_2 توابع خطی با شیب منفی باشند و $f(x) = \log y_1$ و $g(x) = \log y_2$ دامنه تابع

$(f + g)(x)$ به کدام صورت کلی است؟ $(a$ و b اعداد حقیقی هستند.)

- ۱) $(a, +\infty)$ ۲) $(-\infty, a)$ ۳) (a, b) ۴) $\mathbb{R} - [a, b]$ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۱۱۳) اگر $f = \{(0, -1), (1, 0), (4, 1), (2, 5)\}$ باشد، آن گاه تابع $\frac{f}{f-1}$ از چند زوج مرتب

تشکیل شده است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۵

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴۴

۱۱۴) اگر $f(x) = \frac{x-3}{x-4}$ و $g(x) = \sqrt{x-3}$ ، آن گاه دامنه ی تابع $\frac{g}{f}$ چند عدد طبیعی را شامل

نمی شود؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۷

- ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۱۵) اگر $f = \{(1, m), (m, 2), (4, 1), (1, m^2 - 12)\}$ یک تابع باشد و $g(x) = \sqrt{x}$ ، آن

گاه دامنه تابع $(\frac{f}{g})(x)$ چند عضو دارد؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴



۱۱۶ اگر $f = \{(1, 4), (2, 3), (3, 4)\}$ و $f - g = \{(1, -4), (3, 1)\}$ آن گاه تابع

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

$$h(x) = \frac{1}{g(x) - 8} \text{ شامل کدام عضو است؟}$$

(۱, $-\frac{1}{8}$) (۴)

(۳, $\frac{1}{5}$) (۳)

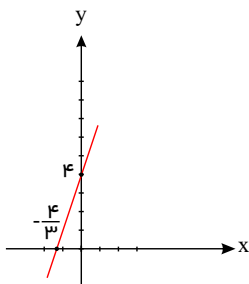
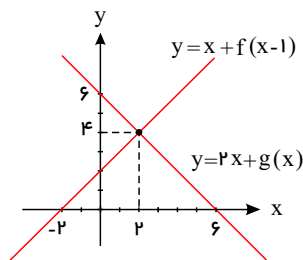
(۳, $-\frac{1}{5}$) (۲)

(۱, $\frac{1}{8}$) (۱)

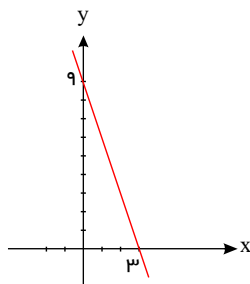
۱۱۷ نمودار توابع $y = x + f(x - 1)$ و $y = 2x + g(x)$ در شکل زیر رسم شده اند. نمودار تابع

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

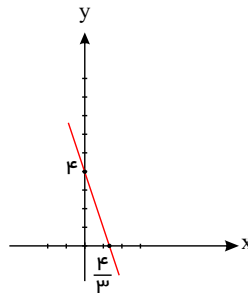
$$y = f(x) + g(x) \text{ کدام است؟}$$



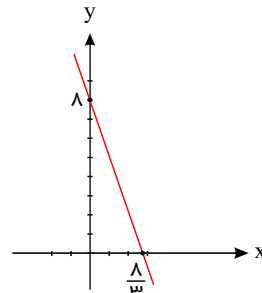
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

۱۱۸ اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ و $g(x) = \sqrt{2 - 2x^2}$ باشند، آن گاه کدام گزینه نشان دهنده تابع

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

$$h = \frac{f}{g} \text{ است؟}$$

(۴) $y = \frac{1}{\sqrt{-2(x^2 - 1)}}$ تابع h تعریف نمی شود. (۳)

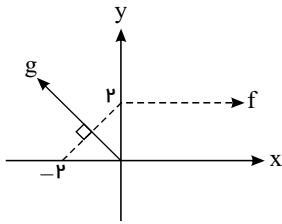
(۲) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

(۱) $y = \frac{1}{\sqrt{2(1 + x^2)}}$



۱۱۹ اگر نمودارهای f و g به صورت زیر باشند، برد تابع $f + 2g$ کدام است؟ (تابع f به صورت خط

منبع قلم چی - ۱۳۹۸



چین و تابع g با خط پر برای تمایز دو تابع رسم شده است).

۱ $[-2, 0]$

۲ $[2, 4]$

۳ $[2, 5]$

۴ $[-2, 2]$

۱۲۰ اگر $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ و $g = \{(-3, 5), (-1, 4), (0, 7)\}$ ، آن گاه بیشترین مقدار

منبع قلم چی - ۱۳۹۴

تابع $2g \cdot (g - f)$ کدام است؟

۴۲ ۴

۸۴ ۳

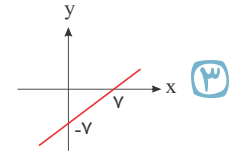
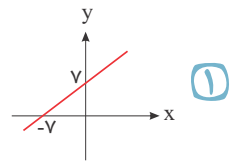
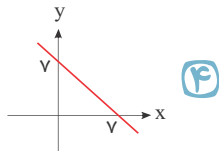
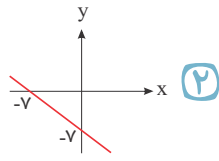
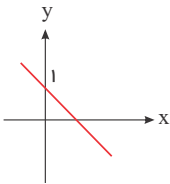
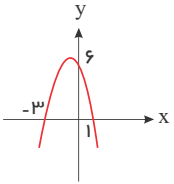
۶۴ ۲

۳۲ ۱

۱۲۱ اگر نمودار توابع f و g به صورت زیر باشد، نمودار تابع $f + g$ کدام است؟ (تابع $f \cdot g$ یک

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

تابع درجه دو است).



۱۲۲ اگر $f(x) = x^2 + |x|$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ ، آن گاه برد تابع $(f \cdot g)(x)$ چند عدد صحیح را شامل

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

نمی شود؟

۴ ۴

۳ ۳

۲ ۲

۱ ۱

۱۲۳ اگر $f(x) = \sqrt{x+3}$ ، $g(x) = \sqrt{a-x} + 2b$ ، $D_{f-g} = [-3, 10]$ و

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

$(f+g)(6) = 6$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱۱ ۴

$\frac{21}{2}$ ۳

۱۰ ۲

$\frac{19}{2}$ ۱



توابع صعودی و نزولی و تابع $y=x^3$

۱۲۴) تابع $f(x) = \frac{1}{|x|}$ مفروض است. در کدام یک از بازه‌های زیر، برای هر x_1 و x_2 عضو این بازه

رابطه‌ی $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ برقرار است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۷

- ۱) $(-3, -1)$ ۲) $(-2, 0)$ ۳) $(-1, 1)$ ۴) $(0, 1)$

۱۲۵) کدام گزینه در مورد ریشه‌های معادله $x^3 = -|x| + 2$ درست است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

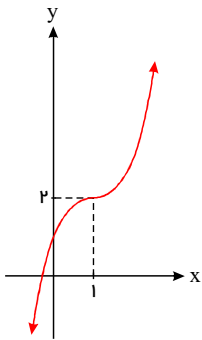
- ۱) فاقد ریشه ۲) فقط یک ریشه مثبت ۳) فقط یک ریشه منفی ۴) دو ریشه مختلف علامه

۱۲۶) تابع با ضابطه $f(x) = |x+2| + |x-1|$ ، در کدام بازه، اکیداً نزولی است؟ سراسری - ۱۳۹۸

- ۱) $(-\infty, -2)$ ۲) $(-\infty, 1)$ ۳) $(-2, 1)$ ۴) $(1, +\infty)$

۱۲۷) نمودار تابع با ضابطه $y = (x-a)^3 + b$ به صورت زیر است. حاصل $a \cdot b$ کدام است؟

- ۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۳ ۴) -۳ منبع قلم چی - ۱۳۹۸



۱۲۸) تابع با ضابطه $f(x) = |x+1| - |x-2|$ ، در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟

خارج از کشور - ۱۳۹۸

- ۱) $(-\infty, 2)$ ۲) $(-1, +\infty)$ ۳) $(-1, 2)$ ۴) $(2, +\infty)$

۱۲۹) تابع $y = 2x + \frac{|x|}{x}$ در دامنه خود چگونه است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱) اکیداً صعودی ۲) اکیداً نزولی ۳) هم صعودی و هم نزولی ۴) غیر یکنوا

۱۳۰) بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x) = x - |x|$ در آن بازه صعودی است، کدام است؟



۱۳۱) نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -(2-x)^3 - 1$ از کدام ناحیه نمی‌گذرد؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۹

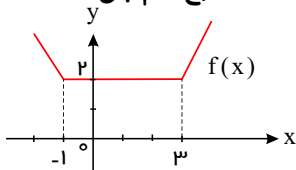
- اول (۱) دوم (۲) سوم (۳) چهارم (۴)

۱۳۲) اگر $f(x) = \sqrt{x-3}$ و $g(x) = 2^{-x}$ باشد، کدام یک از توابع زیر نزولی است؟

- منبع قلم چی - ۱۳۹۸ $f+g$ (۱) fg (۲) $g-f$ (۳) $\frac{f}{g}$ (۴)

۱۳۳) اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $y = f(2+|x|)$ در آن صعودی باشد، کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸



(۱) $[-2, +\infty)$

(۲) $[1, +\infty)$

(۳) $[-1, +\infty)$

(۴) $[-3, +\infty)$

۱۳۴) به ازای $x \in [a, b]$ تابع $f = \{(1, 2x+7), (-2, 10-x), (0, x^2+4)\}$ یک تابع صعودی است. بیش‌ترین مقدار $b-a$ کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۳۵) تابع $f = \{(-6, 2), (0, 4), (6, 7), (7, 9), (2, m^2-3)\}$ غیریکنوا است. m چند عدد صحیح را نمی‌تواند بپذیرد؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- صفر (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴)

۱۳۶) بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع با ضابطه $f(x) = |x+1| + |x-1|$ روی آن صعودی است، کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۵

- (۱) $[1, +\infty)$ (۲) $[-1, +\infty)$ (۳) $(-\infty, -1)$ (۴) $(-\infty, 1]$

۱۳۷) نمودار تابع $y = x^2|x| + 1$ به کدام صورت است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸



۱۳۸ اگر تابع f نزولی و دامنه آن $\mathbb{R}$ باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{f(2) - f(|x - 1|)}$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

(۲) $[-1, 3]$

(۱) $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$

(۴) $\mathbb{R}$

(۳) $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

۱۳۹ اگر $y = f(x)$ تابعی اکیداً یکنوا باشد، تابع $f \circ f(x)$ کدام یک از ضابطه‌های زیر را نمی‌تواند

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

داشته باشد؟

(۴) $y = 2x - 1$

(۳) $y = 4 - x$

(۲) $y = x^9$

(۱) $y = 3 + x$

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۱۴۰ به ازای چند مقدار صحیح m ، تابع $f(x) = \left(\frac{3m+1}{4}\right)^x$ نزولی است؟

(۴) هیچ مقدار m

(۳) ۳

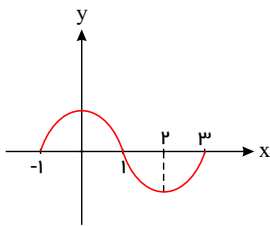
(۲) ۲

(۱) ۱

۱۴۱ شکل زیر نمودار تابع $y = f(x)$ است. نمودار تابع $y = f(1 - x)$ در کدام فاصله اکیداً نزولی

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

است؟



(۱) $[-4, -3]$

(۲) $(-3, -1)$

(۳) $(-1, 1)$

(۴) $[1, 2]$

۱۴۲ مساحت محصور بین محورهای مختصات و خط واصل بین نقاط تلاقی منحنی به معادله

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

$y = (x + 1)^3$ با آن‌ها کدام است؟

(۴) $\frac{2}{3}$

(۳) $\frac{1}{4}$

(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) ۱

۱۴۳ اگر f در مجموعه اعداد حقیقی اکیداً نزولی باشد، دامنه تعریف تابع $y = \sqrt{f(|x|) - f(2)}$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

کدام است؟

(۴) $[-3, 2]$

(۳) $(-\infty, 0]$

(۲) $[-2, 2]$

(۱) $[2, +\infty)$



۱۴۴ تابع $f(x) = \begin{cases} 2 & ; x < -1 \\ k & ; -1 \leq x < 1 \\ -x & ; x \geq 1 \end{cases}$ بر روی دامنه‌اش نزولی است. k چند مقدار صحیح

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

می‌تواند داشته باشد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۴۵ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 2x - x|x|$ در بازه $(-1, 1)$ چگونه است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

ابتدا صعودی، سپس نزولی (۴) نزولی

ابتدا نزولی، سپس صعودی (۲) صعودی

۱۴۶ کدام یک از موارد زیر در مورد تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} |x+1| & ; x \leq -1 \\ -x^2 & ; x \geq 0 \end{cases}$ درست

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

است؟

اکیداً صعودی است. (۲)

صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست. (۱)

اکیداً نزولی است. (۴)

نزولی است ولی اکیداً نزولی نیست. (۳)

۱۴۷ وضعیت نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ چگونه است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

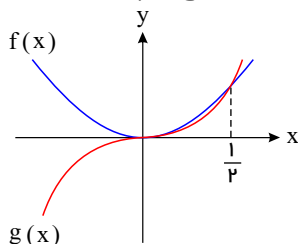
همواره نزولی (۲)

همواره صعودی (۱)

برای $x > 1$ نزولی و برای $x < 1$ صعودی (۴)برای $x > 1$ صعودی و برای $x < 1$ نزولی (۳)

۱۴۸ شکل زیر قسمتی از نمودار مربوط به توابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = ax^3 + bx^2 + c$ است.

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

حاصل $a + b + c$ کدام است؟

۲ (۱)

۲٫۵ (۲)

-۱٫۵ (۳)

-۲٫۵ (۴)

۱۴۹ نمودار تابع $f(x) = |x||x-2|$ در کدام بازه نزولی است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۹

(۲, ۳) (۴)

(۰, ۱) (۳)

(۱, ۲) (۲)

(۰, ۲) (۱)



۱۵۰ اگر $f(x) = \frac{x^4 - 1}{\sqrt{x - 2}}$ و $g(x) = \frac{\sqrt{x - 2}}{x^2 - 1}$ ، آنگاه نمودار تابع $y = (f \cdot g)(x)$ چگونه است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

- ۱ صعودی ۲ نزولی ۳ ابتدا صعودی، سپس نزولی ۴ ابتدا نزولی، سپس صعودی

۱۵۱ تابع $f(x) = 3x^2 + kx + 3k^2$ در بازه $[-2, +\infty)$ صعودی است. حدود k کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱ $k \geq -12$ ۲ $k \leq -12$ ۳ $k \geq 12$ ۴ $k \leq 12$

۱۵۲ اگر دامنه تابع $f(x) = -x^3 + 2$ بازه $[-1, 3]$ باشد، برد آن به صورت $[a, b]$ می باشد. حاصل

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

 $b - a$ کدام است؟

- ۱ ۲۸ ۲ ۳۲ ۳ ۱۸ ۴ ۲۲

۱۵۳ کدام گزینه در مورد تابع $f(x) = x^2 + 4x - 5$ با دامنه $\left|x + \frac{7}{2}\right| < \frac{3}{2}$ درست است؟

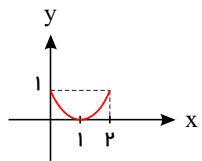
منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱ مثبت است. ۲ نزولی است. ۳ صعودی است. ۴ غیر یکنوا است.

۱۵۴ نمودار تابع $f(x)$ به شکل زیر است. تابع $y = f(f(x))$ با ورودی $1 \leq x \leq 2$ چگونه است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱ صعودی ۲ نزولی ۳ ابتدا نزولی سپس صعودی ۴ ابتدا صعودی سپس نزولی



۱۵۵ اگر تابع $f = \{(-1, a-1), (0, a^3-1), (-2, a)\}$ اکیداً نزولی باشد، حدود a کدام

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

است؟

- ۱ $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ ۲ $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ۳ $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ ۴ $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

کدام است؟

- $$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ (4)} \quad \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \text{ (3)} \quad \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \text{ (2)} \quad \left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right) \text{ (1)}$$

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

- ① $(-2, 3)$ ، اکیڈاً صعودی
 ② $(-2, 3)$ ، اکیڈاً نزولی
 ③ $(-2, +\infty)$ ، اکیڈاً صعودی
 ④ $(-2, +\infty)$ ، اکیڈاً نزولی

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

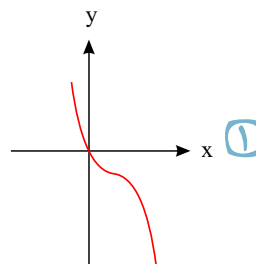
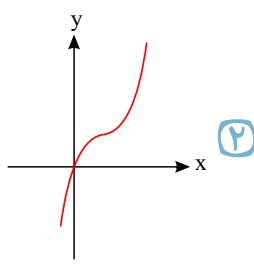
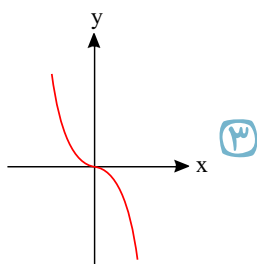
دامنه‌ی تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

- $[0, 1]$ ④ $(-\infty, 1]$ ③ $[0, +\infty)$ ② $[1, +\infty)$ ①

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- $$y = x \left(\frac{1}{\lceil x \rceil + \lceil -x \rceil} \right) \quad \textcircled{F} \qquad y = |x| + |x - 1| \quad \textcircled{3} \qquad y = x - \lceil x \rceil \quad \textcircled{2} \qquad y = x + |x| \quad \textcircled{1}$$

منبع قلم چی - ۱۳۹۸



منبع قلم چی - ۱۳۹۹

یک تابع اکیداً صعودی می باشد؟

- ① صفر ② یک ③ دو ④ بی‌شمار



۱۶۲) نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ از کدام یک از نواحی دستگاه مختصات

عبور نمی‌کند؟

۱) اول

۲) دوم

۳) سوم

۴) چهارم

۱۶۳) اگر بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x) = |x - a| - |x - b|$ در آن اکیداً نزولی است،

به صورت $[-3, 5]$ باشد، دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟

۱) $(3, -5)$

۲) $(5, -3)$

۳) $(-5, 3)$

۴) $(-3, 5)$

۱۶۴) بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع با ضابطه $y = |\log(-x + 1)|$ در آن اکیداً نزولی است، کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

۱) $[0, +\infty)$

۲) $(-\infty, 0]$

۳) $[0, 1)$

۴) $(-\infty, 1]$

۱۶۵) در بازه‌ای که تابع با ضابطه $f(x) = |x - 2| + |x - 3|$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار

تابع $g(x) = 2x^2 - x - 1$ در چند نقطه مشترک هستند؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) فاقد نقطه مشترک

۱۶۶) حدود m کدام باشد تا تابع $f = \{(5, 6), (3, m^2 - m), (-4, 2), (4, m^2 - m)\}$ یک

تابع صعودی باشد؟

۱) $(-2, 1) \cup (2, 3)$

۲) $[-2, 3] - [-1, 2]$

۳) $[-2, 3] - (-1, 2)$

۴) $[-2, 1] \cup [2, 3]$

۱۶۷) اگر f تابعی اکیداً صعودی و $f(1) = 0$ باشد، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{\frac{x-4}{f(3-x)}}$ شامل چند

عدد صحیح است؟

۱) صفر

۲) ۲

۳) ۳

۴) بی شمار



۱۶۸ به ازای چه مقداری از a ، تابع $f(x) = \begin{cases} |x+1| & ; x \leq -1 \\ -\frac{x}{2} + a & ; -1 < x < 1 \\ -\sqrt{x-1} - 1 & ; x \geq 1 \end{cases}$ اکیداً نزولی

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

خواهد بود؟

- ① $\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ -1 ④ $-\frac{3}{2}$

۱۶۹ اگر تابع f اکیداً صعودی و $f(1) = 0$ باشد، آن گاه دامنه $g(x) = \sqrt{(x^3 - x)f(x)}$ برابر $(a, b) - \mathbb{R}$ است. حاصل $a + b$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ① 1 ② صفر ③ -1 ④ 2

ترکیب توابع و دامنه ترکیب توابع

۱۷۰ اگر $f(x) = 2x + 1$ و $g(f(x)) = x^2 + x - 2$ ، آن گاه حاصل $(f \circ g)(3)$ کدام است؟

- ① صفر ② 1 ③ -2 ④ 3

منبع قلم چی - ۱۳۹۵

۱۷۱ اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ و $g(x) = \frac{2x+2}{2-x}$ باشند، ضابطه تابع $g(f(x))$ کدام است؟

- ① $x-1$ ② $x+1$ ③ x ④ $2x$

سراسری - ۱۳۹۶

۱۷۲ اگر $f(x) = \frac{2x+3}{2-x}$ و $g(x) = \frac{1-3x}{x+2}$ باشند، ضابطه تابع $g(f(x))$ کدام است؟

خارج از کشور - ۱۳۹۶

- ① x ② $-x$ ③ $-x-1$ ④ $x+1$

۱۷۳ اگر $f(g(x)) = 3x^2 - 6x - 5$ و $f(x) = 3x + 4$ باشد، $g(2)$ کدام است؟

- ① صفر ② 2 ③ -5 ④ -3

منبع قلم چی - ۱۳۹۸



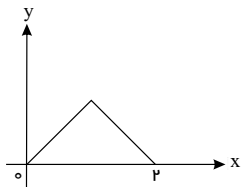
۱۷۴ اگر $f(x) = \sqrt{3-x}$ و $g(x) = \log_2(x^2 + 2x)$ باشند، دامنه‌ی تعریف تابع $f \circ g$ ، کدام است؟
سراسری-۱۳۹۴

۴ $[-4, -2) \cup (0, 2]$

۳ $[-4, -1] \cup (1, 2]$

۲ $[-2, 0]$

۱ $[-4, 2]$



۱۷۵ اگر نمودار f به شکل زیر باشد، دامنه‌ی تعریف تابع g با ضابطه‌ی
منبع قلم چی-۱۳۹۵ $g(x) = \frac{f(1-x)}{f(x)}$ کدام است؟

۴ $(0, 1]$

۳ $[-1, 1] - \{0\}$

۲ $[0, 1]$

۱ $(-1, 1) - \{0\}$

۱۷۶ توابع $f(x) = x^3 - 7$ و $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & ; x \geq 2 \\ \frac{x-1}{x+1} & ; x < 2 \end{cases}$ مفروض‌اند. معادله‌ی

$(f \circ g)(x) = 1$ چند جواب حقیقی دارد؟

منبع قلم چی-۱۳۹۷

۴ ۳

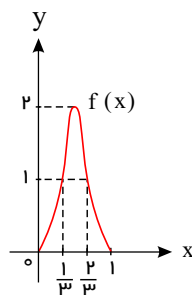
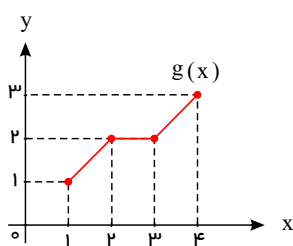
۳ ۲

۲ ۱

۱ صفر

منبع قلم چی-۱۳۹۸

۱۷۷ اگر توابع f و g به شکل زیر باشند، دامنه‌ی تابع $(g \circ f)(x)$ کدام است؟



۱ $[0, 1]$

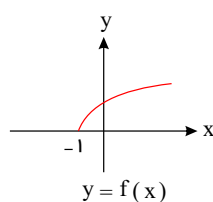
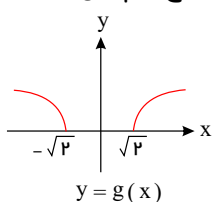
۲ $[0, \frac{1}{3}]$

۳ $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$

۴ $[\frac{2}{3}, 1]$

۱۷۸ اگر نمودار دو تابع f و g به صورت زیر باشد، آنگاه دامنه‌ی تعریف تابع $f \circ g$ ، کدام است؟

منبع قلم چی-۱۳۹۶



۱ $[\sqrt{2}, +\infty)$

۲ $R - [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

۳ $[0, +\infty)$

۴ $R - (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$



۱۷۹ اگر $f(x) = 3 - \sqrt{x+1}$ ، آن گاه دامنه‌ی تعریف تابع $f \circ f$ شامل چند عدد صحیح است؟

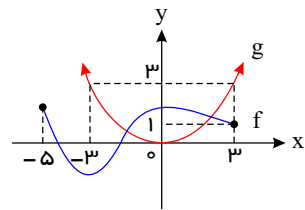
- منبع قلم چی - ۱۳۹۴ ۱۴ (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۷ (۴)

۱۸۰ اگر $f(x) = \sqrt{6+x-x^2}$ ، دامنه‌ی تعریف تابع $y = f(1-2x)$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۵

- (۱) $[-5, 5]$ (۲) $[-3, 2]$ (۳) $[-2, 3]$ (۴) $[-1, \frac{3}{2}]$

۱۸۱ اگر نمودار توابع f و g به صورت زیر باشد، دامنه‌ی تابع $f \circ g$ کدام است؟



- (۱) $[-3, 3]$ (۲) $[1, 3]$ (۳) $[-5, 3]$ (۴) $\mathbb{R}$

۱۸۲ در کدام محدوده از دامنه‌ی تابع $f(x) = 1 - \sqrt{x+1}$ ، تابع $f \circ f$ قابل تعریف است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

- (۱) $x \geq -1$ (۲) $x \geq 1$ (۳) $x \leq 3$ (۴) $-1 \leq x \leq 3$

۱۸۳ اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ و $g(x) = x+4$ باشند، جواب معادله‌ی $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ کدام است؟

خارج از کشور - ۱۳۹۷

- (۱) $-1, -7$ (۲) $1, -7$ (۳) $-1, 7$ (۴) $1, 7$

۱۸۴ اگر $f = \{(5, 2), (3, 4), (1, 8), (6, 9)\}$ و $g(x) = 2f(x+2) - 3$ باشد و داشته باشیم: $(g \circ f)(a) = 15$ ، در این صورت a کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۳



منبع قلم چی - ۱۳۹۴

۱۸۵ در تابع $f(x) = \begin{cases} \cot \frac{\pi x}{4}, & x \leq 1 \\ \sqrt{x^2 + 1}, & x > 1 \end{cases}$ مقدار $f \circ f\left(\frac{2}{3}\right)$ کدام است؟

- ۱) $\frac{\sqrt{22}}{3}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ۴) ۴

۱۸۶ تابع $f(x) = 4x - 3$ با دامنه $[-2, 1]$ مفروض است. اگر دامنه $f \circ f$ بازه $[a, b]$ باشد، $b - a$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۵

- ۱) $\frac{5}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۸۷ هرگاه $x \xrightarrow{f} (1 + \sqrt[3]{x}) \xrightarrow{g} x$ باشد، حاصل عبارت $f(8) + g(2)$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۵

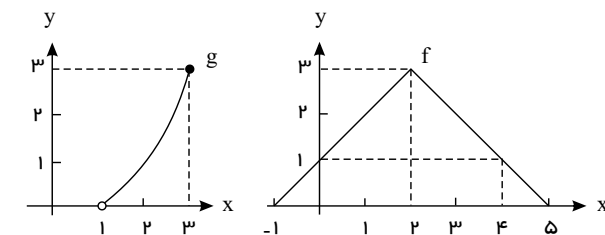
- ۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۱۸۸ اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \geq 0 \\ 2x + 1, & x < 0 \end{cases}$ و $g(x) = \frac{x-1}{2}$ ، آن گاه مجموع طول نقاط برخورد تابع $f \circ g$ با محور x ها کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۶

- ۱) $\frac{1}{2}$ ۲) -۱ ۳) ۳ ۴) ۲

۱۸۹ اگر نمودار دو تابع f و g به صورت زیر باشند، دامنه $f \circ g$ کدام است؟



- ۱) $[-1, 5]$ ۲) $(0, 4]$ ۳) $(1, 3]$ ۴) $(0, 4)$



۱۹۰ اگر $f(x) = \frac{4}{x-1}$ و $g(x) = \frac{1}{2-x}$ باشد، دامنه توابع $g \circ f$ کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۷

- ① $R - \{2, 3\}$ ② $R - \{1, 2, 3\}$ ③ $R - \{1, 2\}$ ④ $R - \{1, 3\}$

۱۹۱ اگر $g(x) = x + \sqrt{x}$ ، $f = \{(2, 3), (a, 4), (12, 1)\}$ باشد و $f \circ g = \{(1, 3), (4, 4), (b, 1)\}$ حاصل $a + b$ کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ① ۶ ② ۹ ③ ۳ ④ ۱۵

۱۹۲ اگر $f(x) = x^2 - 3x + 8$ و $g(x) = 1 - 2x$ باشند و α و β را ریشه‌های معادله $(f \circ g)(x) = 12$ بنامیم، آن گاه حاصل $|\alpha - \beta|$ کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ① ۲٫۵ ② ۲ ③ ۱٫۵ ④ ۴٫۵

۱۹۳ اگر $f(x) = x^2 - 2x$ و $g(x) = \sqrt{4 - x} + 1$ باشند، برد تابع $f \circ g(x)$ کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ① $[-1, 1]$ ② $[-1, +\infty)$ ③ $(-\infty, 1]$ ④ $\mathbb{R}$

۱۹۴ اگر $f(x) = 8x^3 - 1$ و $(f \circ g)(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ باشد، مقدار $(f + g)(-1)$ کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ① -۶ ② -۷ ③ -۸ ④ -۹

۱۹۵ اگر $f(x) = x - [x]$ و $g(x) = x + [x]$ آن گاه برد تابع $g \circ f$ کدام است؟ $[]$ ، نماد جزء صحیح است. منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ① $[0, +\infty)$ ② $\mathbb{R}$ ③ $[0, 1)$ ④ $(0, 1)$

۱۹۶ اگر $(f \circ g)(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ و $g(x) = \frac{x-1}{x}$ باشد، ضابطه تابع $f + g$ کدام است؟ $(x \neq 0, 1)$ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ① $\frac{4}{x}$ ② $\frac{2}{x}$ ③ $-\frac{4}{x}$ ④ $-\frac{2}{x}$



۱۹۷ اگر $g(x) = x^3 - x$ و $(fog)(x) = x^6 - 2x^4 + x^2 + 1$ باشند، حاصل $f(3)$ کدام

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

است؟

۱۰ (۴)

۱۷ (۳)

۵ (۲)

۳ (۱)

۱۹۸ اگر $g(x) = 1 - 2x$ باشد، آنگاه با توجه به ماشین

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

$x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow -6x^2 - 2x + 3$ مقدار $f(1)$ کدام است؟

-۳ (۴)

۳ (۳)

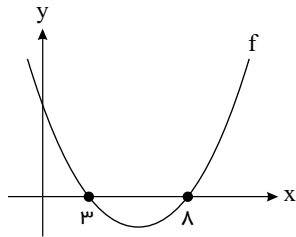
-۱ (۲)

۱ (۱)

۱۹۹ با توجه به نمودار تابع درجه دوم f و تابع $g(x) = 2\sqrt{x} + x$ ، نمودار تابع fog محور x ها را با

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

طولهای a و b قطع می کند. مقدار $a + b$ کدام است؟



۱ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۱۱ (۴)

۲۰۰ دو تابع با ضابطه های $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & , x < 0 \end{cases}$ و

$g = \{(2, -1), (-1, 4), (-2, 3), (-4, -3)\}$ مفروض اند. اگر $g(f(a)) = 3$ باشد، a کدام

منبع قلم چی - ۱۳۹۵

است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

-۱ (۲)

-۴ (۱)

۲۰۱ اگر $f = \{(-1, -2), (0, 2), (2, 1)\}$ و $g = \{(1, -1), (2, a^2 + a), (0, 1)\}$

منبع قلم چی - ۱۳۹۶

$(2, 2) \in fog$ باشد، مجموعه مقادیر a کدام است؟

$\{0, -1\}$ (۴)

$\{0, 1\}$ (۳)

$\{1, -2\}$ (۲)

$\{1, 2\}$ (۱)



منبع قلم چی - ۱۳۹۶

۲۰۲ با توجه به شکل مقابل، حاصل $f(\frac{1}{2})$ کدام است؟

$$x \rightarrow \frac{x}{x^2 + 1} \rightarrow f \rightarrow \frac{2x + 1}{x^2 + 1}$$

۳
۲ (۴)

صفر (۳)

۸
۳ (۲)

۱ (۱)

باشد،

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 0 \\ x + 3 & x > 0 \end{cases}$$

و

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

اگر ۲۰۳

منبع قلم چی - ۱۳۹۶

کدام است؟ $fog(\sqrt{2} - 1) - gof(1 - \sqrt{2})$

۲ (۴)

۱ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

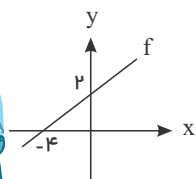
۲۰۴ نمودار $f(x)$ به صورت روبه‌رو است. حاصل $(f \circ f)(20)$ کدام است؟

۶ (۲)

۵ (۱)

۸ (۴)

۷ (۳)



۲۰۵ اگر $f(x) = x^2 - 3x + 2$ و $g(x) = x^2 - x + 1$ باشند، معادله $fog(x) = 0$ چند

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

ریشه دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۲۰۶ اگر $f(x) = [\frac{1}{x}]$ و $g(x) = |x|$ حاصل $f(g(1 - \sqrt{2})) - g(f(1 - \sqrt{2}))$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

[]، نماد جزء صحیح است.

۱
۲ (۴)

۱ (۳)

۵ (۲)

صفر (۱)



۲۰۷ برای دو تابع $f = \{(-1, a), (2, 1), (b, 2)\}$ و $g = \{(-2, -1), (c, 3), (-3, \frac{1}{3})\}$ اگر

داشته باشیم: $(fog)(-2) + (fog)(1) = 5$ ، حاصل $a + b + c$ کدام است؟ منبع قلم چی- ۱۳۹۸

- ۹ (۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴)

۲۰۸ اگر $f(x) = \sqrt{x} - x$ ، دامنه تابع $f \circ f$ کدام است؟ منبع قلم چی- ۱۳۹۸

- (۱) $\{0, 1\}$ (۲) $[0, +\infty)$ (۳) $[0, 1]$ (۴) $[1, +\infty)$

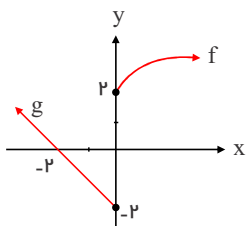
۲۰۹ اگر $f(x) = 3x - 2$ و $(g \circ f)(x) = 9x^2 - 9x + 2$ باشد، ضابطه تابع $(g - f)(x)$ کدام

است؟ منبع قلم چی- ۱۳۹۸

- (۱) $-x^2 - 2x + 2$ (۲) $x^2 + 2x - 1$ (۳) $-x^2 + 2x - 1$ (۴) $x^2 - 2x + 2$

۲۱۰ اگر نمودار توابع f و g به صورت مقابل باشند، دامنه تابع $f \circ g$ چند عدد صحیح منفی را شامل نمی

شود؟ منبع قلم چی- ۱۳۹۸



- (۲) صفر
(۴) ۱

شود؟

- (۱) ۲
(۳) ۳

۲۱۱ اگر $f(x) = \frac{3x-1}{2}$ و $g = \{(-1, 0), (2, -1), (3, 4)\}$ باشد، آنگاه مجموع عضوهای

برد تابع $fo(\frac{1}{g+1})$ کدام است؟ منبع قلم چی- ۱۳۹۸

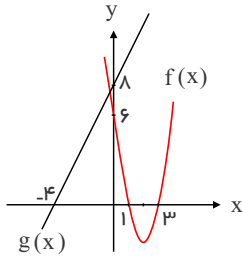
- (۱) $-\frac{1}{5}$ (۲) $-\frac{6}{5}$ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) $\frac{4}{3}$



۲۱۲) نمودار توابع $f(x)$ و $g(x)$ به صورت زیر می باشد. اگر f یک سهمی باشد، مجموع جواب های

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

معادله $(f \circ g)(x) = 0$ کدام است؟



۱) -۴

۲) -۶

۳) -۸

۴) -۱۰

۲۱۳) توابع $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = x^2 + ax + b$ مفروضند. اگر برد تابع $g \circ f$ برابر $\{2\}$

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

باشد، a کدام است؟

۴) -۲

۳) -۱

۲) ۲

۱) ۱

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۲۱۴) در نمودار مقابل، اگر $f(x) = \frac{2^x - 1}{3}$ باشد، $g(5)$ کدام است؟

$$x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow x$$

۴) ۵

۳) ۴

۲) ۳

۱) ۲

۲۱۵) اگر $f(x) = \sqrt{2+x}$ و $g(x) = x^2$ باشد، آنگاه معادله $g(f(x)) = 5$ چند ریشه حقیقی

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

دارد؟

۲) فقط یک ریشه منفی

۱) فقط یک ریشه مثبت

۴) ریشه حقیقی ندارد.

۳) یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی

۲۱۶) اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = x^2 - 6x + 10$ باشند، مساحت ناحیه محدود بین نمودار

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

تابع $f \circ g$ و خط $y = 2$ کدام است؟

۴) ۴

۳) ۳

۲) ۲

۱) ۱



۲۱۷ اگر $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشند. دامنه‌ی تعریف تابع $g \circ f$ کدام است؟

سراسری - ۱۳۹۶

- ۱) $[0, 1]$ ۲) $\{0\}$ ۳) $(-1, 1)$ ۴) $\mathbb{R} - \{1, -1\}$

۲۱۸ اگر f و g توابعی چندجمله‌ای باشند به طوری که $(f+g)(x) = 4$ و $(f \circ g)(x) = 7 - 4x$ ،

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

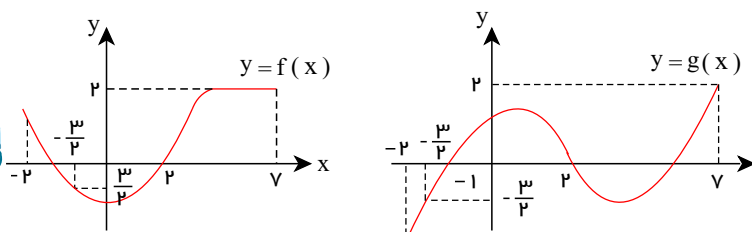
حاصل جمع مقادیر ممکن برای $g(2)$ کدام است؟

- ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) -۳ ۴) -۲

۲۱۹ نمودارهای توابع f و g به صورت زیر هستند. عبارت $y = \frac{1}{\sqrt{f(x) - g(x)}}$ به ازای چه

منبع قلم چی - ۱۳۹۴

مقادیری از x تعریف شده است؟



- ۱) $(-2, 2) \cup (2, 7)$

- ۲) $[-2, -\frac{3}{2}] \cup [2, 7]$

- ۳) $(-2, 7) - \{-\frac{3}{2}, 2\}$

- ۴) $[-2, -\frac{3}{2}) \cup (2, 7)$

۲۲۰ اگر $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشند، دامنه‌ی تعریف تابع $g \circ f$ کدام است؟

خارج از کشور - ۱۳۹۶

- ۱) $[0, 1]$ ۲) $[-1, 1]$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\mathbb{R} - (-1, 1)$

۲۲۱ اگر $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ، $(f \circ g)(x) = x^2 + 3x + \frac{5}{4}$ و $g(x)$ یک تابع خطی با شیب

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

مثبت باشد، ضابطه‌ی تابع $g(f(x))$ کدام است؟

- ۱) $-x^2 + 4x + \frac{1}{2}$ ۲) $-x^2 + 4x - \frac{13}{2}$ ۳) $x^2 - 4x - \frac{1}{2}$ ۴) $x^2 - 4x + \frac{13}{2}$



۲۲۲ اگر $f(x) = [x] - x$ و $g(x) = \frac{1-2x}{x+1}$ باشند، برد تابع $g \circ f$ کدام است؟ $[]$ ، نماد جزء

خارج از کشور- ۱۳۹۹

صحیح است.

(۴) $(-\infty, 1]$

(۳) $[1, +\infty)$

(۲) $(-1, 1]$

(۱) $[-1, 1]$

۲۲۳ اگر $f(x) = 2x - [2x]$ و $g(x) = -x^2 + 4x$ باشند، بُرد تابع $g \circ f$ کدام است؟ $[]$ ، نماد

سراسری- ۱۳۹۹

جزء صحیح است

(۴) $[1, 4)$

(۳) $[0, 4)$

(۲) $[0, 3)$

(۱) $[0, 2)$

۲۲۴ فرض کنید $g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ و $f(x) = 1 - x^2$. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $g \circ f$

سراسری- ۱۴۰۰

کدام است؟

(۴) ۳

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

مسائل مربوط به $f(x)$

۲۲۵ اگر $f(2x - 3) = 4x^2 - 14x + 13$ باشد، ضابطه‌ی $f(x)$ برابر کدام است؟

سراسری- ۱۳۹۷

(۴) $x^2 - x + 1$

(۳) $x^2 - 2x + 1$

(۲) $x^2 - 2x - 1$

(۱) $x^2 - x + 3$

۲۲۶ اگر $g(x) = 2x + 1$ و $(f \circ g)(x) = 8x^2 + 6x + 5$ باشند، تابع $f(x)$ برابر کدام است؟

خارج از کشور- ۱۳۹۵

(۴) $2x^2 + x + 3$

(۳) $2x^2 - x + 4$

(۲) $2x^2 - 2x + 3$

(۱) $2x^2 + 3x + 1$



۲۲۷) تابع با ضابطه‌ی $g(x) = x - \sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f محور x ها را در دو نقطه به طول‌های ۶ و $-\frac{1}{4}$ قطع کند، آنگاه نمودار تابع $f \circ g$ ، محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

خارج از کشور - ۱۳۹۴

- ۱) ۴ و $\frac{1}{9}$ ۲) ۹ و $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ و ۴ ۴) ۹ و ۴

۲۲۸) اگر $f(x+3) = x + \frac{5}{x}$ ، نمودار تابع $y = 3 - f(2x)$ از کدام نقطه می‌گذرد؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۴

- ۱) (۲, ۵) ۲) (۲, ۲) ۳) (۴, -۳) ۴) (۸, -۳)

۲۲۹) تابع $f(x) = \frac{x+1}{x+a}$ مفروض است. اگر $f(x) \cdot f(-\frac{1}{x}) = -1$ باشد، مقدار a کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۲۳۰) اگر $f(x - \frac{1}{x}) = x + \frac{1}{x} + 6$ ، آنگاه $f(\sqrt{2})$ کدام می‌تواند باشد؟ ($x \neq 0$)

منبع قلم چی - ۱۳۹۴

- ۱) $6 - \sqrt{6}$ ۲) $\sqrt{2} + 6$ ۳) $4 - \sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{2} - 4$

تابع ثابت - تابع همانی - تابع خطی

۲۳۱) اگر $f(x)$ یک تابع خطی و $f(3) = f(-3) + 4$ و $f(2) = 1$ باشد، آنگاه نمودار تابع f

محور y ها را با چه عرضی قطع می‌کند؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{3}$



۲۳۲ اگر f تابعی خطی باشد به صورتی که رابطه $f(x-1) + f(x+2) = x$ برقرار باشد، آن گاه $f(2)$ کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ ۱ ④ $\frac{1}{2}$

۲۳۳ اگر تابع $y = \frac{3x^2 + x}{(a-1)x^2 + bx + c}$ در دامنه خود یک تابع همانی باشد، حاصل $a + b + c$ کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۹

- ① ۳ ② ۴ ③ ۵ ④ ۶

۲۳۴ تابع f همانی، تابع g ثابت و تابع h خطی است. اگر داشته باشیم: $2f(-2) = g(2)$ ، $h(-2) = g(0) + 1$ و $h(2) = f(2) + g(3) + 1$ ، مجموعه جواب نامعادله $h(x) \geq 0$ کدام است؟ (دامنه هر سه تابع، $\mathbb{R}$ است.) منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ① $(-\infty, -2]$ ② $[0, +\infty)$ ③ $[4, +\infty)$ ④ $(-\infty, 0]$

۲۳۵ اگر f تابع ثابت، g تابع همانی و $\frac{2f(3)}{5g(-1)} = 1$ باشد، آن گاه حاصل $f(2) \times g(2)$ کدام گزینه می باشد؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۹

- ① ۵ ② -۵ ③ ۴ ④ -۴

۲۳۶ اگر $f(x)$ تابع همانی، $g(x)$ تابع ثابت و $h(x) = g^2(x) - 2f(x)g(x)$ باشد و داشته باشیم: $h(3) = -8$ ، آن گاه حاصل $h(2)$ کدام می تواند باشد؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۹

- ① ۴ ② -۴ ③ ۲ ④ -۲

۲۳۷ تابع $f(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{2x^2 + cx + d}$ ، یک تابع ثابت با ضابطه $y = k$ و دامنه $\mathbb{R} - \{-3\}$ است. حاصل $\frac{a-b+c-d}{k}$ کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ① -۱۰ ② ۱۰ ③ ۵ ④ -۵



تابع یک به یک

۲۳۸) تابع $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ چگونه است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۶

- ۱) یک به یک - صعودی ۲) یک به یک - نزولی ۳) غیر یک به یک - صعودی ۴) غیر یک به یک - نزولی

۲۳۹) چه تعداد از توابع زیر یک به یک می باشند؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۵

ب) $f(x) = 2 + |x|$

الف) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

د) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

ج) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$

۴ ۴

۳ ۳

۲ ۲

۱ ۱

۲۴۰) اگر تابع $f(x) = x^2 + (a+1)x + 3$ برای $x \geq 3$ یک به یک باشد، کمترین مقدار a

منبع قلم چی - ۱۳۹۶

کدام است؟

-۷ ۴

-۵ ۳

-۶ ۲

$\frac{3}{2}$ ۱

۲۴۱) به ازای کدام مقدار a ، تابع $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 4 & , x \geq 1 \\ 2x - a & , x < 1 \end{cases}$ می تواند یک به یک باشد؟

منبع - ۱۳۹۲

-۴ ۴

-۶ ۳

-۸ ۲

-۷ ۱

۲۴۲) توابع $f(x) = 2x - |x|$ و $g(x) = x - |2x|$ از نظر یک به یک بودن به ترتیب از راست به

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

چپ چگونه اند؟

۲) یک به یک - غیر یک به یک

۱) یک به یک - یک به یک

۴) غیر یک به یک - غیر یک به یک

۳) غیر یک به یک - یک به یک



۲۴۳ اگر $f = \{(-3, k), (\frac{1}{2}a, -2), (2a + 1, k), (b - 1, 1), (-1, 4b)\}$ تابعی یک به یک باشد، حاصل $a - b$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۲ (۴)

-۱ (۳)

 $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۱)

۲۴۴ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & ; x \geq 7 \\ \frac{x}{3} + a & ; x < 6 \end{cases}$ یک به یک است. حداکثر مقدار a کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۶

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۲۴۵ در تابع $f = \{(-1, 0), (0, 1), (1, -1), (2, 2)\}$ رابطه $f(1 - f(x_0)) = f(x_0)$ برقرار است، x_0 کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۲ (۴)

۱ (۳)

صفر (۲)

-۱ (۱)

۲۴۶ اگر $f = \{(-1, 4), (2, 3), (-1, 4m), (m+1, n-1), (5, 6), (p, n+2)\}$ تابعی یک به یک باشد، $m + n + p$ چقدر است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۶

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)

۲۴۷ هرگاه f تابعی یک به یک باشد و $f(x + 2f(x)) = f(5x + 2)$ ، در این صورت نمودار تابع $y = f \circ f(x)$ محور y ها را با چه عرضی قطع می‌کند؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۲۴۸ به ازای کدام مقدار a ، تابع $f(x) = \begin{cases} (2-a)x & , x < 0 \\ ax + 1 & , x \geq 0 \end{cases}$ یک به یک است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۴

۷ (۴)

۵ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)



۲۴۹ به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، تابع $f(x) = |2x + a|$ در فاصله $[-1, 2]$ یک به یک است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ① $\mathbb{R} - (-1, \frac{1}{2}]$ ② $[-4, 2]$ ③ $\mathbb{R} - (-4, 2)$ ④ $[-1, \frac{1}{2}]$

۲۵۰ اگر $f = \{(4, 2), (a, 5), (4, a^2 - a), (b, 2), (-1, 4)\}$ یک تابع یک به یک باشد،

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

زوج مرتب (a, b) کدام است؟

- ① $(2, -1)$ ② $(2, 4)$ ③ $(-1, 4)$ ④ $(2, 2)$

۲۵۱ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & ; x \leq -1 \\ m - x & ; x > -1 \end{cases}$ یک به یک باشد، حدود m کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

- ① $m \geq -8$ ② $m \leq -8$ ③ $m > -7$ ④ f به ازای هیچ مقداری از m یک به یک نمی شود.

۲۵۲ اگر تابع $f = \{(1, -2), (2, 4), (a+1, -2), (6, a), (b+2, 0), (c, b+a)\}$ یک به یک

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

یک باشد، حاصل $\frac{b}{c}$ کدام است؟

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۲۵۳ اگر رابطه $f = \{(3, 2), (a, 5), (3, a^2 - a), (b, 2), (-1, 4)\}$ تابع یک به یک باشد،

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

نمودار تابع $g(x) = ax + b$ محور طول ها را در چه نقطه ای قطع می کند؟

- ① $(3, 0)$ ② $(-\frac{3}{2}, 0)$ ③ $(-3, 0)$ ④ $(\frac{3}{2}, 0)$

۲۵۴ حدود m برای آن که تابع $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & ; x \leq 1 \\ mx + 5 & ; x > 1 \end{cases}$ یک به یک باشد، کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

- ① $m \geq -1$ ② $m > 0$ ③ $m \leq -1$ ④ $m < 0$



۲۵۵ به ازای چه حدودی از a ، تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & ; x > 2 \\ x + 2 & ; x \leq 2 \end{cases}$ یک به یک نیست؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

(۴, +∞) (۴)

(۰, +∞) (۳)

(-∞, ۰) (۲)

(-∞, ۴) (۱)

۲۵۶ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \geq 0 \\ ax + b & x < 0 \end{cases}$ یک به یک باشد، آنگاه حدود قابل قبول برای a و b

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

کدام است؟

$\begin{cases} a > 0 \\ b \geq 2 \end{cases}$ (۴)

$\begin{cases} a < 0 \\ b \leq 2 \end{cases}$ (۳)

$\begin{cases} a = 1 \\ b \geq 2 \end{cases}$ (۲)

$\begin{cases} a > 0 \\ b \leq 2 \end{cases}$ (۱)

تابع وارون (معکوس)

۲۵۷ دو تابع $f = \{(2, 5), (6, 3), (3, 7), (4, 1), (1, 9)\}$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$ مفروض اند. اگر

سراسری - ۱۳۹۶

 $g(2a) = f^{-1}(a)$ کدام است؟

$\frac{5}{2}$ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

$\frac{3}{4}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

۲۵۸ اگر $f = \{(1, 5), (2, 0), (3, 4), (4, 6)\}$ و $g = \{(-1, 4), (2, 1), (0, 3)\}$ باشند،

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

حاصل ضرب اعضای برد تابع $\frac{2f}{g^{-1}}$ کدام است؟

۳۶ (۴)

صفر (۳)

-۶۰ (۲)

-۷ (۱)

منبع قلم چی - ۱۳۹۴

۲۵۹ اگر تابع $f(x) = \frac{3x-1}{x-a}$ وارون خودش باشد، $f(1)$ کدام است؟

۳ (۴)

-۳ (۳)

۱ (۲)

-۱ (۱)



۲۶۰) قرینه‌ی خط به معادله‌ی $3y - 2x = 4$ را نسبت به خط $y = x$ ، خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟

سراسری - ۱۳۹۷

- ۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۲۶۱) به ازای کدام مقادیر m ، نمودار تابع معکوس $f(x) = \frac{x-4}{2x-1}$ از نقطه‌ی $(m+2, m)$ می‌گذرد؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۵

- ۱) هیچ مقدار ۲) ۱ و ۲ ۳) ۱ و ۲ ۴) ۱ و -۲

۲۶۲) تابع با ضابطه $f(x) = |x^3|$ با دامنه R ، چگونه است؟

خارج از کشور - ۱۳۹۵

- ۱) نزولی ۲) صعودی ۳) وارون ناپذیر ۴) یک به یک

۲۶۳) دو تابع $f = \{(5, 2), (7, 3), (1, 4), (3, 6), (9, 1)\}$ و $g(x) = \sqrt{5x+9}$ مفروض‌اند.

خارج از کشور - ۱۳۹۶

اگر $(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 8$ باشد، a کدام است؟

- ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۶۴) اگر $f(x) = x^2 - \sqrt{3x}$ و $g = \{(-2, 0), (0, 3), (1, -1), (3, -2)\}$ باشند، آنگاه

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

حاصل $(f \circ g^{-1})(-2)$ کدام است؟

- ۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) تعریف نشده

۲۶۵) اگر $f(x) = x + x|x|$ با دامنه $[-1, 2]$ در نظر گرفته شود، تعداد اعداد صحیح در دامنه تابع

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

$f^{-1} \circ f$ کدام است؟

- ۱) ۳ ۲) ۸ ۳) ۲ ۴) ۶

۲۶۶) تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^3 + ax + 2a$ مفروض است. اگر عرض از مبدأ نمودار تابع f^{-1}

منبع قلم چی - ۱۳۹۴

برابر (-1) باشد، a کدام است؟

- ۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{3}$



۲۶۷ اگر $f = \{(-1, 0), (1, 2), (0, 1), (2, -1)\}$ باشد، آن گاه $f + f^{-1}$ شامل کدام زوج

منبع قلم چی - ۱۳۹۴

مرتب نیست؟

- (۱) $(1, 2)$ (۲) $(-1, 1)$ (۳) $(0, 0)$ (۴) $(2, 0)$

۲۶۸ در تابع $f(x) = \frac{2x+3}{x+a}$ ، مقدار a را طوری انتخاب کرده‌ایم که f^{-1} بر f منطبق باشد، مقدار

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

a کدام است؟

- (۱) $1,5$ (۲) 2 (۳) $-1,5$ (۴) -2

۲۶۹ اگر $f^{-1}(x) = \sqrt{x+7}$ و $g = \{(2, 1), (-1, 0), (1, 3), (0, 6)\}$ ، آن گاه حاصل

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

$(3)g^{-1}(f^{-1})$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) 1 (۳) 2 (۴) 3

۲۷۰ اگر $f(x) = \{(-1, 1), (0, 2), (1, 4)\}$ و $g(x) = \{(1, 2), (2, 3), (-1, 0)\}$ باشد؛

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

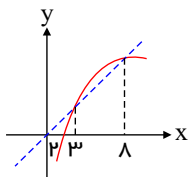
حاصل $(f^{-1} \circ g)(1)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) 1 (۳) 2 (۴) 3

۲۷۱ شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = f(x)$ و نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم است. دامنه‌ی تعریف تابع با

سراسری - ۱۳۹۴

ضابطه‌ی $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$ کدام است؟



- (۱) $(0, 2]$ (۲) $[2, 3]$ (۳) $[2, 8]$ (۴) $[3, 8]$

۲۷۲ اگر $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = \frac{5x+2}{2x-1}$ ، آن گاه حاصل $(f \circ g^{-1})(4)$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۵

- (۱) 6 (۲) 20 (۳) 2 (۴) 12



۲۷۳ اگر $f(x) = \sqrt{1-x}$ ، آن گاه دامنه‌ی تعریف تابع $y = \sqrt{1+f^{-1} \circ f(x)}$ کدام است؟

منبع قلم چی- ۱۳۹۵

- ① $[0, 1]$ ② $[-1, 1]$ ③ $(-\infty, -1]$ ④ $(-\infty, 1]$

۲۷۴ تابع $f(x) = x^2 - 4x$ با دامنه‌ی $[3, +\infty)$ مفروض است. نمودار تابع معکوس تابع f از

منبع قلم چی- ۱۳۹۶

کدام نواحی مختصات می‌گذرد؟

- ① فقط اول ② اول و دوم ③ فقط چهارم ④ اول و چهارم

۲۷۵ باتوجه به ماشین مقابل، اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ و g یک به یک باشند و داشته باشیم

منبع قلم چی- ۱۳۹۴

$g(m) = 2$ مقدار m کدام است؟

- $x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow x$
- ① ۲ ② ۲٫۵ ③ ۱٫۵ ④ ۱

۲۷۶ اگر $f^{-1} = \{(2, 1), (3, -2), (4, -1)\}$ و $f - 2g = \{(-2, -1), (-1, 8)\}$ تابع g

منبع قلم چی- ۱۳۹۷

یک به یک باشد، کدام نقطه زیر حتماً روی g^{-1} قرار دارد؟

- ① $(-1, -2)$ ② $(-2, -1)$ ③ $(-2, 1)$ ④ $(1, -2)$

۲۷۷ تابع وارون تابع $y = x + \sqrt{x}$ به صورت $y = \left(\frac{\sqrt{ax+1}-1}{b}\right)^2$ می‌باشد، مقدار $\frac{a}{b}$ کدام

منبع قلم چی- ۱۳۹۷

است؟

- ① ۱ ② ۲ ③ ۴ ④ ۶

۲۷۸ تابع f با دامنه $(2, 3)$ و ضابطه $f(x) = [-x]x + [x]$ تعریف شده است. مقدار $f^{-1}(-5)$

منبع قلم چی- ۱۳۹۸

کدام است؟

- ① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{7}{3}$ ③ ناموجود ④ $\frac{8}{3}$



۲۷۹) توابع $f = \{(0, 1), (-1, 2), (1, 3), (3, 4)\}$ و $g(x) = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x-1}$ مفروض اند.

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

اگر $(f^{-1} \circ g)(a) = f(0)$ باشد، a کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۱۷ (۲)

۱۶ (۱)

۲۸۰) اگر $f(x) = \frac{2}{5}x - 4$ و $g(x) = x^3 + x$ باشند، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(8)$ ، کدام است؟

خارج از کشور - ۱۳۹۸

۲٫۵ (۳)

۲ (۲)

۱٫۵ (۱)

سراسری - ۱۳۹۶

۲۸۱) ضابطه‌ی وارون تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$ ، کدام است؟

$f^{-1}(x) = -x|x|$ (۴)

$f^{-1}(x) = x|x|$ (۳)

$f^{-1}(x) = x^2$ (۲)

$f^{-1}(x) = -x^2$ (۱)

و $f = \{(2, 3), (-1, 2), (-4, 1), (3, 0)\}$ اگر

$g = \{(0, 2), (2, -4), (3, 2), (-4, -2)\}$ آن گاه، حاصل $(f \circ g \circ f^{-1})(3)$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

۱ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

۲۸۳) کدام گزینه بیانگر تابعی وارون پذیر است؟

$y = 1 - 3x + |x|$ (۴)

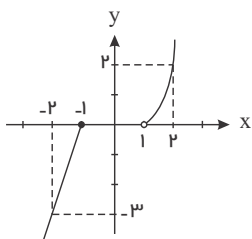
$y = 1 + 3|x| - x$ (۳)

$y = 1 - 3|x| + x$ (۲)

$y = |x| + 1 - x$ (۱)

۲۸۴) نمودار $y = f(x+2)$ داده شده است. حاصل عبارت $A = \frac{f^{-1}(0) + f^{-1}(2)}{1 + f^{-1}(-3)}$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۷



-۱ (۲)

۲ (۴)

۵ (۱)

صفر (۳)



۲۸۵) بزرگ‌ترین فاصله‌ای که تابع $f(x) = |x - 1| - |x + 3|$ معکوس‌پذیر است کدام است؟

- ۱) $[-4, 4]$ ۲) $[-3, 1]$ ۳) $[-1, 1]$ ۴) $\emptyset$ منبع قلم‌چی - ۱۳۹۴

۲۸۶) اگر $f(x) = \frac{2x+3}{1-2x}$ و $g(x) = 6x^2 - x - 2$ ، آنگاه حاصل $(g \circ f^{-1})(-3)$ کدام است؟

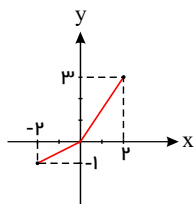
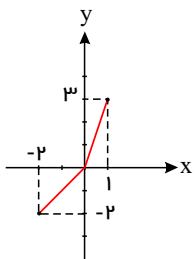
- ۱) ۱۰ ۲) $-\frac{23}{7}$ ۳) ۱۳ ۴) $-\frac{23}{49}$ منبع قلم‌چی - ۱۳۹۵

۲۸۷) نمودار تابع $f(x) = -x^3 + ax + b$ در نقطه‌ی $(-1, \frac{1}{3})$ نمودار تابع وارونش را قطع می‌کند. مقدار $a + b$ کدام است؟

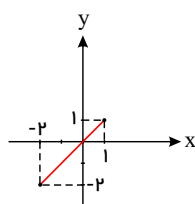
- ۱) $-\frac{1}{9}$ ۲) $-\frac{10}{9}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{13}{9}$ منبع قلم‌چی - ۱۳۹۴

۲۸۸) نمودار تابع $y = f^{-1}(x)$ به شکل روبه‌رو است. نمودار تابع $y = (f^{-1} \circ f)(x)$ کدام است؟

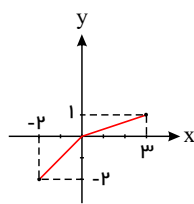
منبع قلم‌چی - ۱۳۹۸



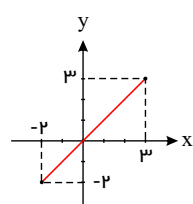
۴



۳



۲



۱

۲۸۹) اگر $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ باشند، ضابطه وارون تابع $f \circ g$ کدام است؟

- ۱) $(f \circ g)^{-1}(x) = x; x \geq 1$ ۲) $(f \circ g)^{-1}(x) = x; x \leq 1$ ۳) $(f \circ g)^{-1}(x) = \sqrt{x}; x \geq 1$ ۴) $(f \circ g)^{-1}(x) = \sqrt{x}; x \leq 1$ منبع قلم‌چی - ۱۳۹۷



۲۹۰ اگر تابع $f = \{(\frac{4}{k}, 2), (1, 4), (k+3, 2), (3, k+3)\}$ وارون پذیر و $g(x) = [\frac{x}{2} - 2]$ باشد، مقدار $(f - g)(-k - 1)$ کدام است؟ $(\quad)$ ، نماد جزء صحیح است

- ۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) -۲ منبع قلم چی - ۱۳۹۷

۲۹۱ اگر $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ و $g(x) = \frac{2x-1}{3x+2}$ ، آن گاه حاصل $(fog^{-1})(-\frac{1}{9})$ کدام

است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۷

- ۱) صفر ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) $-\frac{19}{30}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۲۹۲ اگر داشته باشیم: $g(x) = f(2x+5)$ و $f^{-1}(x) = \frac{x^3}{9} + \sqrt[3]{9x}$ ، آن گاه حاصل عبارت

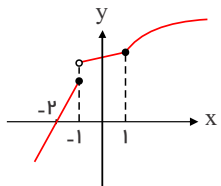
$f^{-1}(g^{-1}(f(-1)))$ کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱) صفر ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۶

۲۹۳ اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر باشد، کدام یک از بازه‌های زیر در برد وارون تابع

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

$g(x) = \sqrt{f(x)}$ قرار ندارد؟



- ۱) $[1, 4]$ ۲) $(-1, 0]$ ۳) $[-2, -1]$ ۴) $(-3, -2]$

۲۹۴ اگر $f(x) = -2x + b$ تابعی خطی باشد و نمودار تابع $f^{-1}(x)$ از نقطه $(6, 8)$ بگذرد و

$g(x) = -1.5x + 6$ باشد، آنگاه نمودار تابع $g(x)$ و وارون تابع $f(x)$ در نقطه‌ای با کدام طول

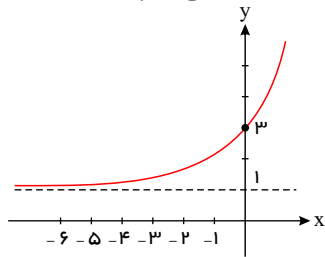
یکدیگر را قطع می‌کنند؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱) ۵ ۲) -۵ ۳) ۳۲ ۴) -۳۲



۲۹۵ شکل مقابل، مربوط به نمودار وارون تابع $f(x) = \log_p(x+a) + b$ است. $a + b$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸



- ۱) ۲
۲) -۲
۳) صفر
۴) -۱

۲۹۶ دو تابع $f = \{(2, a+1), (3, 7)\}$ و $g = \{(2a-1, -1), (6, 2)\}$ مفروضند. اگر

منبع قلم چی - ۱۳۹۴

$(-1, 2) \in (g \circ f)^{-1}$ ، مقدار a کدام است؟

- ۱) ۲
۲) ۱
۳) -۱
۴) -۵

۲۹۷ اگر $f(x) = x + 2$ ، $g(x) = 2x^2 - 8x + 1$ باشند، آن گاه حاصل جمع ریشه‌های

منبع قلم چی - ۱۳۹۴

معادله‌ی $g \circ f^{-1}(x) = 0$ کدام است؟

- ۱) $-\frac{25}{2}$
۲) $\frac{25}{2}$
۳) ۸
۴) -۸

منبع قلم چی - ۱۳۹۵

۲۹۸ تابع معکوس تابع $f(x) = 1 + \sqrt{1-x}$ کدام است؟

- ۱) $f^{-1}(x) = 2x - x^2, x \leq 1$
۲) $f^{-1}(x) = x^2 - 2x + 2, x \leq 1$
۳) $f^{-1}(x) = 2x - x^2, x \geq 1$
۴) $f^{-1}(x) = x^2 - 2x + 2, x \geq 1$

۲۹۹ تابع خطی f مفروض است. اگر نمودار دو تابع f و f^{-1} محور x ها را در نقطه‌ای به طول یک

منبع قلم چی - ۱۳۹۶

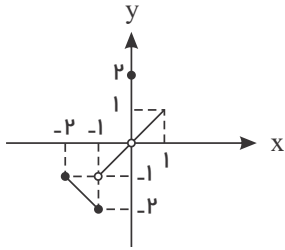
قطع کنند. $f^{-1}(2)$ کدام است؟

- ۱) -۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲



۳۰۰ اگر $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{1-2x}$ و نمودار تابع $y = g(x)$ به صورت زیر باشد، در این صورت به ازای

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

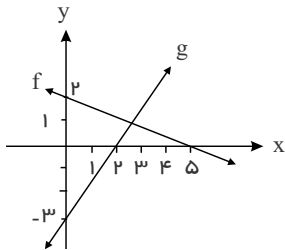


چه مقداری از a ، $f(g^{-1}(a)) = 1$ است؟

- ۱) -۲
۲) -۱
۳) ۱
۴) صفر

۳۰۱ نمودار تابع های f و g مطابق شکل زیر است. حاصل $(f+g)^{-1}(0)$ کدام

منبع قلم چی - ۱۳۹۷



- ۱) ۳
۲) صفر
۳) $\frac{10}{11}$
۴) ۷

است؟

۳۰۲ در تابع خطی f رابطه $4f(2x) = f(8x-1) - 5$ برقرار است. اگر $f^{-1}(3) = 5$ باشد،

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

مقدار m از تساوی $f^{-1}(m) = 2$ کدام است؟

- ۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۳۰۳ به ازای چند مقدار m تابع

$$f = \{(1, m^3 - m), (m, 4), (1, 4m^2 - 4), (5, m+1), (0, m^2 + 2)\}$$

وارون پذیر است؟
منبع قلم چی - ۱۳۹۸

- ۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۳۰۴ تابع f با ضابطه $f(x) = x^2 - x + 5$ و دامنه $D_f = [1, +\infty)$ مفروض است. وارون این

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

تابع محور x ها را با چه طولی قطع می کند؟

- ۱) ۵
۲) $\frac{1+\sqrt{26}}{2}$
۳) $\frac{1-\sqrt{26}}{2}$
۴) نقطه برخورد ندارد.



۳۰۵ در تابع $f(x) = x^3 + x + 2$ ، اگر محل برخورد $f^{-1}(x)$ با محور x ها را A' بنامیم و نقطه A قرینه A' نسبت به خط $y = x$ باشد، آن گاه اندازه پاره خط AA' کدام است؟
منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۱
 $2\sqrt{2}$ (۴)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳)

$2\sqrt{2}$ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

۳۰۶ اگر تابع $f(x) = ax + 2$ با وارونش در بیش از یک نقطه تقاطع داشته باشند، مقدار $f^{-1}(3)$ کدام است؟
منبع قلم چی - ۱۳۹۸

-۵ (۴)

۵ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)

۳۰۷ دو تابع $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 6), (4, 7)\}$ و $g(x) = x + \sqrt{x}$ مفروض اند. به ازای چند مقدار a ، $f^{-1}(g(3a)) = 3$ می باشد؟
منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۳۰۸ مجموعه طول نقاط مشترک نمودار توابع $f(x) = \sqrt[3]{4 - x^3}$ و $f^{-1}(x)$ چند عضو دارد؟
منبع قلم چی - ۱۳۹۸

این مجموعه نامتناهی است. (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۳۰۹ نمودار وارون تابع $f(x) = 1 - \sqrt{x + 3}$ از کدام ناحیه محورهای مختصات عبور نمی کند؟
منبع قلم چی - ۱۳۹۸

چهارم (۴)

سوم (۳)

دوم (۲)

اول (۱)

۳۱۰ اگر $f = \{(-1, 3), (0, 2), (2, 1), (4, 0)\}$ و

$g = \{(1, -2), (-2, 0), (3, -1), (0, 1)\}$ باشند و داشته باشیم: $(g \circ f^{-1})(a) = 1$ ، آنگاه مقدار $(f \circ g)(-a)$ کدام است؟
منبع قلم چی - ۱۳۹۸

صفر (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



۳۱۱ اگر $g(x) = x^3$, $f(x) = \frac{1}{4}x - 8$ باشد، حاصل $(f \circ g)^{-1}(8) - (f^{-1} \circ g^{-1})(8)$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۴ -۳۶

۳ ۳۶

۲ -۱۶

۱ صفر

۳۱۲ اگر f و g توابعی وارون پذیر، با دامنه و برد $\mathbb{R}$ باشند و داشته باشیم: $f^{-1}(g(4)) = 5$ و $g^{-1}(f^{-1}(3)) = 4$ ؛ آن گاه $f(f(5))$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

۴ اطلاعات مسئله کافی نیست.

۳ ۵

۲ ۴

۱ ۳

۳۱۳ اگر $f^{-1} = \{(2, 3), (1, -1), (0, 2), (-1, 0)\}$ باشد، آن گاه تابع $\frac{2f^{-1}}{f}$ شامل کدام زوج مرتب است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۶

۴ $(-1, 0)$

۳ $(-4, 0)$

۲ $(0, -1)$

۱ $(0, 4)$

۳۱۴ اگر محل برخورد نمودار تابع $f(x) = 2x - |x| + 1$ با نمودار تابع وارونش نقطه $A(a, b)$ باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

۴ ۲

۳ ۱

۲ صفر

۱ -۱

۳۱۵ نمودار وارون تابع $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 2}$ در چند نقطه خط $y = 3x$ را قطع می کند؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

۴ صفر

۳ ۳

۲ ۲

۱ ۱

۳۱۶ وارون تابع $y = \frac{2x - 1}{x - 2}$ ، نیمساز ناحیه دوم و چهارم را در نقاط A و B قطع می کند. طول پاره

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

خط AB کدام است؟

۴ $8\sqrt{2}$

۳ $4\sqrt{2}$

۲ $2\sqrt{2}$

۱ $\sqrt{2}$



۳۱۷) اگر تابع اکیداً صعودی $f(x) = \frac{mx - 2}{3}$ در نقطه‌ای به طول $x = 1$ ، نمودار تابع وارون خود را

قطع کند، ضابطه تابع وارون کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

$$f^{-1}(x) = \frac{5x + 2}{3} \quad \text{④}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{5x - 2}{3} \quad \text{③}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3x - 2}{5} \quad \text{②}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3x + 2}{5} \quad \text{①}$$

۳۱۸) اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$ و $g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$

باشند. تابع $\frac{g}{g \circ f^{-1}}$ کدام است؟

سراسری - ۱۳۹۸

$$\{(3, 5), (2, 4)\} \quad \text{④}$$

$$\{(5, 2), (2, 4)\} \quad \text{③}$$

$$\{(4, 2), (3, 5)\} \quad \text{②}$$

$$\{(4, 2), (5, 2)\} \quad \text{①}$$

۳۱۹) اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$ و $g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$ دو

تابع باشند، برد تابع $f - (g^{-1} \circ f)$ کدام است؟

خارج از کشور - ۱۳۹۸

$$\{2, -1\} \quad \text{④}$$

$$\{3, 4\} \quad \text{③}$$

$$\{2, 3\} \quad \text{②}$$

$$\{-1, 4\} \quad \text{①}$$

منبع قلم چی - ۱۳۹۹

۳۲۰) ضابطه وارون تابع $f(x) = 1 - \sqrt{2x}$ کدام است؟

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2; x \geq 1 \quad \text{②}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2; x \leq 1 \quad \text{①}$$

$$f^{-1}(x) = -2(x - 1)^2; x \geq 1 \quad \text{④}$$

$$f^{-1}(x) = -2(x - 1)^2; x \leq 1 \quad \text{③}$$

۳۲۱) تابع با ضابطه $y = x|x - 2|$ در یک بازه، نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه، کدام

سراسری - ۱۳۹۴

است؟

$$f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1 - x}; x < 1 \quad \text{②}$$

$$f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1 + x}; x < 0 \quad \text{①}$$

$$f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1 - x}; 0 < x < 1 \quad \text{④}$$

$$f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1 - x}; 0 < x < 1 \quad \text{③}$$



۳۲۲ تابع با ضابطه ی $f(x) = |2x - 6| - |x + 1|$ در یک بازه، صعودی است. ضابطه ی معکوس آن، در این بازه کدام است؟

خارج از کشور - ۱۳۹۴

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + 2; x > 3 \quad (2)$$

$$f^{-1}(x) = -x + 7; x > 8 \quad (1)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 1; -4 < x < 8 \quad (4)$$

$$f^{-1}(x) = x + 7; x > -4 \quad (3)$$

۳۲۳ اگر داشته باشیم $g^{-1}(x) = ax^3 + bx$, $g(x) = 2f(\frac{x}{3})$, $f^{-1}(x) = 8x^3 + 4x$

آنگاه $a + b$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۴

$$18 \quad (4)$$

$$9 \quad (3)$$

$$6 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

۳۲۴ اگر $f(x) = \log(\sqrt{x^2 + 1} + x)$ باشد، آن گاه حاصل $f^{-1}(x) + f^{-1}(-x)$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۶

$$x - 1 \quad (4)$$

$$\text{صفر} \quad (3)$$

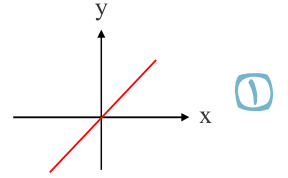
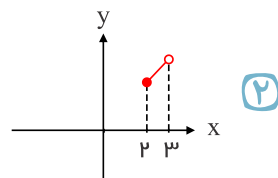
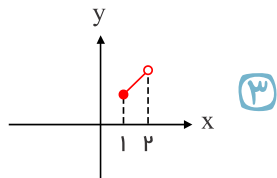
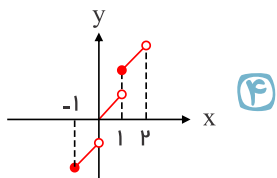
$$10^x - 10^{-x} \quad (2)$$

$$x \quad (1)$$

۳۲۵ اگر $f^{-1}(x)$ وارون تابع $f(x) = x + [x]$ با دامنه $D_f = [1, 2)$ باشد، آن گاه نمودار تابع

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

$y = (f \circ f^{-1})(x)$ کدام است؟



۳۲۶ ضابطه معکوس تابع $f(x) = x^2 + 6x - 1$ با فرض $(x \leq -4)$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۶

$$f^{-1}(x) = -3 + \sqrt{x + 10}; x \geq -10 \quad (2)$$

$$f^{-1}(x) = -3 - \sqrt{x + 10}; x \geq -9 \quad (1)$$

$$f^{-1}(x) = -3 + \sqrt{x + 10}; x \geq -9 \quad (4)$$

$$f^{-1}(x) = -3 - \sqrt{x + 10}; x \geq -10 \quad (3)$$



۳۲۷) نمودارهای $f(x) = (\frac{1}{2})^{ax-1}$ و $g(x) = 32^{x-1}$ در نقطه‌ای به عرض $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ متقاطع‌اند. در

این صورت نمودار $f^{-1}(x)$ ، خط $x = \frac{1}{16}$ را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۷

$$\frac{43}{7} \quad (4)$$

$$\frac{14}{25} \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$\frac{7}{5} \quad (1)$$

۳۲۸) مساحت مثلث محصور بین نمودار توابع $f(x) = 2x - a$ و $f^{-1}(x)$ و محور x ‌ها برابر ۲۷

است. نمودار تابع $f(x)$ محور طول‌ها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟ ($a > 0$) منبع قلم چی - ۱۳۹۸

$$2 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$6 \quad (1)$$

۳۲۹) نمودار تابع $y = \sqrt{1 - 2x}$ را یک واحد به چپ و سپس یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم.

ضابطه‌ی معکوس تابع به دست آمده کدام است؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۵

$$f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{-1 - 2x}, \quad x \leq \frac{-1}{2} \quad (1)$$

$$f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 1, \quad x \geq 1 \quad (2)$$

$$f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1, \quad x \leq \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1, \quad x \geq 1 \quad (4)$$

۳۳۰) برد تابع $f(x) = 2^{x+1}$ را به بازه‌ی $(a, b]$ محدود کرده‌ایم که برای تابع

$g(x) = \sqrt{6 - 2x}$ ترکیب $g \circ f^{-1}$ قابل انجام باشد. حداکثر مقدار $(b - a)$ کدام است؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۶

$$16 \quad (4)$$

$$8 \quad (3)$$

$$6 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

۳۳۱) تابع $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$ مفروض است. تابع $g(x) = \sqrt[3]{x}$ با کدام یک از انتقال

های زیر بر تابع f^{-1} منطبق می‌شود؟ منبع قلم چی - ۱۳۹۸

$$(2) \quad \text{یک واحد به سمت چپ و ۲ واحد به سمت پایین}$$

$$(1) \quad \text{یک واحد به سمت چپ و ۲ واحد به سمت بالا}$$

$$(4) \quad \text{یک واحد به سمت راست و ۲ واحد به سمت پایین}$$

$$(3) \quad \text{یک واحد به سمت راست و ۲ واحد به سمت بالا}$$



۳۳۲ تابع $f(x) = |x - 1| - |x + 3|$ در بازه $[a, b]$ یک به یک بوده و $b - a$ حداکثر مقدار

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

ممکن است. ضابطه وارون آن در این بازه کدام است؟

$$f^{-1}(x) = -\frac{x}{2} - 1; -3 \leq x \leq 1 \quad (2)$$

$$f^{-1}(x) = -\frac{x}{2} - 1; -4 \leq x \leq 4 \quad (1)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - 1; -3 \leq x \leq 1 \quad (4)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - 1; -4 \leq x \leq 4 \quad (3)$$

منبع قلم چی - ۱۳۹۴

۳۳۳ اگر $f(x) = f^{-1}(5) + x - 3$ باشد، آن گاه $f(5)$ کدام است؟

(4) ۷

(3) ۶

(2) ۵

(1) ۴

۳۳۴ تابع با ضابطه $f(x) = x - |x - 2| + 1$ در بازه ای وارون پذیر است. ضابطه ی معکوس آن

منبع قلم چی - ۱۳۹۵

در بازه ی مذکور کدام است؟

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}; x \leq 2 \quad (2)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}; x \leq 2 \quad (1)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}; x \leq 3 \quad (4)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}; x \leq 3 \quad (3)$$

۳۳۵ اگر $f(x) = 2x + |x|$ باشد، معادله ی $f^{-1}(x) + 3x = 0$ چند جواب دارد؟

منبع قلم چی - ۱۳۹۶

(4) بی شمار

(3) دو

(2) یک

(1) صفر

۳۳۶ تابع $f(x) = x^2 - 6x + 3$ را با دامنه محدود شده $D_f = (-\infty, 0)$ در نظر بگیرید. وارون

منبع قلم چی - ۱۳۹۸

این تابع در کدام گزینه آمده است؟

$$f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x+6}; x > 3 \quad (2)$$

$$f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x+6}; x < 3 \quad (1)$$

$$f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x+6}; x > 3 \quad (4)$$

$$f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x+6}; x < 3 \quad (3)$$

۳۳۷ اگر $f(x) = 4 - \sqrt{x-3}$ باشد، طول نمودار رسم شده تابع

منبع قلم چی - ۱۳۹۷

$g(x) = f \circ f^{-1}(x) + f^{-1} \circ f(x)$ برابر کدام گزینه است؟

(4) $\sqrt{5}$

(3) ۲

(2) $\sqrt{3}$

(1) $\sqrt{2}$



۳۳۸ فرض کنید در دامنه $[0, +\infty)$ تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2^x + (\frac{1}{2})^x}{2}$ مفروض باشد. $f^{-1}(2)$ کدام است؟

سراسری - ۱۳۹۹

- ☐ ۱ $\log_2(2 - \sqrt{3})$
☐ ۲ $\log_2(\sqrt{3} - 1)$
☐ ۳ $\log_2(1 + \sqrt{3})$
☐ ۴ $\log_2(2 + \sqrt{3})$

۳۳۹ تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2^x - (\frac{1}{2})^x}{2}$ را در نظر بگیرید. $f^{-1}(2)$ کدام است؟

خارج از کشور - ۱۳۹۹

- ☐ ۱ $\log_2(-1 + \sqrt{5})$
☐ ۲ $\log_2(1 + \sqrt{5})$
☐ ۳ $\log_2(2 + \sqrt{5})$
☐ ۴ $\log_2(3 + \sqrt{5})$

۳۴۰ تابع f با ضابطه $f(x) = x - \frac{2}{x}$ در دامنه $D_f = (-\infty, 0)$ را در نظر بگیرید. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه چهارم را با کدام طول قطع می‌کند؟

سراسری - ۱۳۹۹

- ☐ ۱ $\frac{3}{4}$
☐ ۲ ۱
 ☐ ۳ $\frac{3}{2}$
☐ ۴ ۲

۳۴۱ با فرض $f(x) = x^2 - 4x + 9$; $x \geq 2$ و $g(x) = \frac{3-x}{2}$ حاصل $(f^{-1} \circ g^{-1})(-9)$ کدام است؟

خارج از کشور - ۱۳۹۹

- ☐ ۱ ۳
 ☐ ۲ ۴
 ☐ ۳ ۵
 ☐ ۴ ۶

۳۴۲ تابع f با ضابطه $f(x) = x - \frac{1}{2x}$ بر دامنه $(0, +\infty)$ مفروض است. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه دوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

خارج از کشور - ۱۳۹۹

- ☐ ۱ $-\frac{3}{2}$
☐ ۲ $-\frac{3}{4}$
☐ ۳ -۱
 ☐ ۴ $-\frac{1}{2}$

۳۴۳ اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{9x+6}{1-x}$ باشند، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(20)$ کدام است؟

سراسری - ۱۳۹۹

- ☐ ۱ $\frac{2}{5}$
☐ ۲ $\frac{3}{5}$
☐ ۳ $\frac{2}{3}$
☐ ۴ $\frac{3}{4}$



۳۴۴ اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + \sqrt{x}$ باشد، مقدار $g(۱۲) + g(۶)$ ، کدام است؟

- ۱۰ (۱) ۱۱ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴) سراسری - ۱۳۹۹

۳۴۵ فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + ۲\sqrt{x}$ باشد. حاصل $g(۱۵) + g(۳)$ ، کدام است؟

- ۱۲ (۱) ۱۱ (۲) ۱۰ (۳) ۸ (۴) خارج از کشور - ۱۳۹۹



پاسخنامه تشریحی

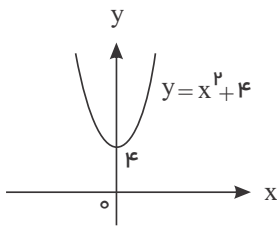
۱) y تابعی از x است هرگاه به ازای هر x فقط و فقط یک y وجود داشته باشد.

گزینه ۱: تابع نیست، زیرا اگر $x = 5$ باشد، آن گاه $y^2 = 1$ و $y = \pm 1$ که معرف تابع نیست.

گزینه ۳: تابع نیست، زیرا اگر $x = 1$ باشد، آن گاه $|y - 1| = 2$ در نتیجه -1 یا 3 که معرف تابع نیست.

گزینه ۴: تابع نیست، زیرا اگر $x = 0$ باشد، آن گاه y هر مقداری می تواند داشته باشد.

گزینه ۲: با توجه به نمودار مقابل، تابع است.



زیرا هر خطی موازی محور y ها رسم کنیم، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می کند.

۲) چون $\frac{\pi}{2} = \frac{3.14}{2} < 2$ است، برای محاسبه $f(\frac{\pi}{2})$ باید از ضابطه ی پایین استفاده کرد.

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sin \frac{\pi}{2} = 1 + 1 = 2$$

$$f\left(\pi f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = f(2\pi) \stackrel{2\pi > 2}{=} 1 - \cos 2\pi = 1 - 1 = 0$$

ضابطه ی بالا

۱ ۲ ۳ ۴ ۳

$$f = \{(2, a), (a, a^2 - 2), (a, 3a - 4), (a^3 - 6, b)\}$$

$$\text{شرط تابع بودن} \Rightarrow a^2 - 2 = 3a - 4 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow (a - 1)(a - 2) = 0 \Rightarrow a = 1, a = 2$$

$$a = 1 \Rightarrow f = \{(2, 1), (1, -1), (-5, b)\} \Rightarrow b \in \mathbb{R} \Rightarrow b^2 \geq 0 \Rightarrow -b^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow 1 - b^2 \stackrel{a=1}{\leq} 1 \Rightarrow a^2 - b^2 \leq 1 \quad (1)$$

$$a = 2 \Rightarrow f = \{(2, 2), (2, 2), (2, b)\} \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a^2 - b^2 = 4 - 4 = 0$$

باتوجه به رابطه (۱) گزینه ۴ صحیح است.

۴) ابتدا شرط تابع بودن را در نظر می گیریم.

$$(0, b) = (0, d - b) \Rightarrow d - b = b \Rightarrow d = 2b$$

$$f = \{(2b, 1), (a + c, a - b), (0, b), (2b, c)\}$$

$$(2b, 1) = (2b, c) \Rightarrow c = 1 \Rightarrow f = \{(2b, 1), (a + 1, a - b), (0, b)\}$$

حال با توجه به این که تابع f شامل دو زوج مرتب است، حالات زیر را داریم:

$$(2b, 1) = (0, b) \Rightarrow 2b = 0, \quad b = 1 \Rightarrow b = 0, \quad b = 1 \Rightarrow \text{غیر ممکن}$$

$$(a + 1, a - b) = (0, b) \Rightarrow a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1, \quad a - b = b \Rightarrow -1 = 2b \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

چون $a, b > 0$ پس $a = -1$ و $b = -\frac{1}{2}$ نیز غیر قابل قبول است.

$$(2b, 1) = (a + 1, a - b) \Rightarrow \begin{cases} 2b = a + 1 \Rightarrow a = 2b - 1 \\ a - b = 1 \Rightarrow 2b - 1 - b = 1 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = 3 \end{cases}$$

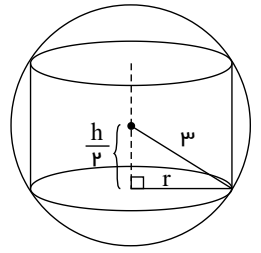
$$a + b = 3 + 2 = 5$$

۵) اگر شعاع قاعده استوانه را r در نظر بگیریم، داریم:



$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2 = 3^2 \Rightarrow \frac{1}{4}h^2 + r^2 = 9 \Rightarrow r^2 = 9 - \frac{1}{4}h^2$$

$$V = \pi r^2 h = \pi \left(9 - \frac{1}{4}h^2\right)h$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۶

تابع نیست. $|x| + |y| = 1$, $x = 0 \Rightarrow |y| = 1 \Rightarrow y = \pm 1$ (گزینه ۱)

تابع نیست. $y^2 + x^3 = -1 \Rightarrow y^2 = -x^3 - 1$, $x = -2 \Rightarrow y^2 = -(-2)^3 - 1 = 7$

تابع نیست. $y^2 = 7 \Rightarrow y = \pm\sqrt{7}$

تابع نیست. $|y| + x^2 + 1 - 2x = 0 \Rightarrow |y| + (x-1)^2 = 0$ (گزینه ۳)

مجموع دو عبارت نامنفی زمانی صفر است که هر دو باهم صفر باشند.

تابع است. $y = 0$, $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \{(1, 0)\}$

تابع نیست. $y = \begin{cases} x+2 & x \geq 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 2$ (گزینه ۴)

۱ ۲ ۳ ۴ ۷ با بررسی گزینه‌ها داریم:

تابع نیست. $x = 2 \Rightarrow 1 + (-1)^y = 2 \Rightarrow (-1)^y = 1 \Rightarrow y = 2, 4, 6, \dots$ (گزینه ۱)

برای $x = 2$ ، بی‌شمار y وجود دارد پس تابع نمی‌باشد.

تابع نیست. $y^3 - y = x$, $x = 0 \Rightarrow y^3 - y = 0 \Rightarrow y(y^2 - 1) = 0 \Rightarrow y = 0, y = \pm 1$ (گزینه ۲)

برای $x = 0$ ، ۳ مقدار y وجود دارد پس تابع نمی‌باشد.

تابع نیست. $y = \begin{cases} 3x-1 & x \geq 1 \\ x+2 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1.6 \Rightarrow y = 3 \times 1.6 - 1 = 3.8$ (گزینه ۳)

برای $x = 1.6$ دو مقدار برای y وجود دارد پس تابع نمی‌باشد.

تابع نیست. $|y-1| + |x-3| = 0$ (گزینه ۴)

مجموع دو عبارت نامنفی زمانی صفر است که هر دو باهم صفر شوند پس داریم:

$y-1=0 \Rightarrow y=1$, $x-3=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow \{(3, 1)\}$

رابطه فوق فقط از یک زوج مرتب بصورت $(3, 1)$ تشکیل شده است، پس تابع است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۸ مجموعه دو عبارت نامنفی زمانی صفر است که هر دو باهم صفر باشند.

تابع نیست. $|y^2 - 1| + (1 - x^4) = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow |y^2 - 1| = 0 \Rightarrow y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$ (الف)

برای $x = 1$ دو مقدار برای y به دست آمده است. پس تابع نیست.

تابع نیست. $|y| = \sqrt{x} \pm \sqrt{-x} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ -x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \{(0, 0)\}$ (ب)

این رابطه فقط از زوج مرتب $(0, 0)$ تشکیل شده است. پس تابع است.

تابع نیست. $|x| - |y| = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow 2 - |y| = 0 \Rightarrow |y| = 2 \Rightarrow y = \pm 2$ (ج)

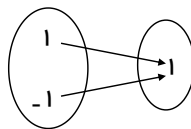
تابع است. $|x| + |y| = 0 \Rightarrow \begin{cases} |x| = 0 \Rightarrow x = 0 \\ |y| = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases} \Rightarrow \{(0, 0)\}$ (د)

۱ ۲ ۳ ۴ ۹ (الف) تابع نیست، زیرا ممکن است یک فرد به چندین نوشیدنی متفاوت علاقه داشته باشد.

(ب) تابع نیست، زیرا مثلاً عدد ۲۵ دارای دو ریشه دوم ۵ و -۵ است.

(پ) ابتدا نامعادله $x^2 - 4 < 0$ را حل می‌کنیم:

$$x^2 - 4 < 0 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow -2 < x < 2$$



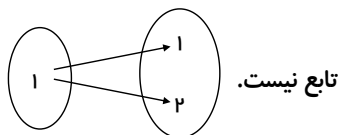
$\Rightarrow 1 = \text{مقسوم علیه های طبیعی } \pm 1 \Rightarrow \{-1, 1\} = \text{اعداد صحیح مخالف صفر}$

تابع است $\Rightarrow$ (ت) ابتدا نامعادله $|x-1| < 1$ را حل می کنیم:

$$|x-1| < 1 \Rightarrow -1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2 \Rightarrow \text{دامنه} = \{1\}$$

حال نامعادله $2x^2 - 18 < 0$ را حل می کنیم:

$$2x^2 - 18 < 0 \Rightarrow x^2 < 9 \Rightarrow |x| < 3 \Rightarrow -3 < x < 3 \xrightarrow{\text{اعداد طبیعی}} \text{برد} = \{1, 2\}$$



تابع نیست.

۱۰ از آن جا که $(-1, 3k)$, $(-1, -9)$ هر دو عضو f هستند، باتوجه به تعریف تابع باید: $3k = -9$ و در نتیجه $k = -3$ اما با این مقدار k نیز رابطه ی f تابع نخواهد بود، زیرا در این صورت زوج مرتب $(2+k, 5)$ به صورت $(-1, 5)$ درخواهد آمد و خواهیم داشت:

$$f = \{(-1, -9), (-1, 5), (6, -3)\}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱

$$f\left(\frac{3}{2}\right) - f(2) + f\left(-\frac{3}{2}\right) = 5$$

$$\rightarrow \left(-\frac{27}{8} + \frac{9}{4}a + \frac{3}{2} + 2\right) - (-8 + 4a + 2 + 2) + \left(\frac{27}{8} + \frac{9}{4}a - \frac{3}{2} + 2\right) = 5$$

$$\rightarrow \frac{9}{2}a - 4a + 8 = 5 \rightarrow \frac{a}{2} = -3 \rightarrow a = -6$$

$$\text{پس: } f(x) = -x^3 - 6x^2 + x + 2 \rightarrow f(1) + f(2) = -1 - 6 + 1 + 2 - 8 - 24 + 2 + 2 = -32$$

۱۲ اگر تابع داده شده را به صورت زوج مرتبی بنویسیم، داریم:

$$\{(3, |a^2 - 2a - 1|), (7, 1), (3, 2), (7, b-1)\}$$

حال با در نظر گرفتن شرط تابع بودن داریم:

$$(7, 1) = (7, b-1) \Rightarrow b-1 = 1 \Rightarrow b = 2$$

$$(3, |a^2 - 2a - 1|) = (3, 2) \Rightarrow |a^2 - 2a - 1| = 2 \Rightarrow a^2 - 2a - 1 = \pm 2$$

$$a^2 - 2a - 1 = 2 \Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow (a-3)(a+1) = 0 \Rightarrow a = 3, a = -1$$

$$a^2 - 2a - 1 = -2 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

حداکثر $a \cdot b$ به ازای $a = 3$ و $b = 2$ حاصل می شود، پس داریم:

$$\text{Max}(ab) = 3 \times 2 = 6$$

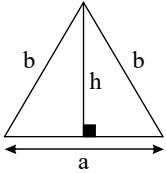
۱۳ دامنه هر دو ضابطه در $x = 1$ اشتراک دارد پس دو ضابطه تعریف شده به ازای $x = 1$ باهم برابر هستند یعنی:

$$2m - 1 = -2 + 3m \rightarrow m = 1$$

و از آنجایی که $x = 1 - \sqrt{2}$ عددی کوچکتر از یک می باشد در ضابطه بالا جایگذاری می شود.

$$f(1 - \sqrt{2}) = 2(1)(1 - \sqrt{2}) - (1 - \sqrt{2})^2 = 2 - 2\sqrt{2} - (1 + 2 - 2\sqrt{2}) = -1$$

۱۴ طبق شکل داریم: $a + 2b = 120$ ، بنابراین: $b = 60 - \frac{a}{2}$



از طرفی طبق رابطه فیثاغورس داریم:

$$h^2 + \frac{a^2}{4} = b^2 \Rightarrow h^2 + \frac{a^2}{4} = \left(60 - \frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \sqrt{\left(60 - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{3600 + \frac{a^2}{4} - 60a - \frac{a^2}{4}}$$

$$\rightarrow h = \sqrt{3600 - 60a}$$

پس اندازه مساحت مثلث برابر است با:

$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a\sqrt{3600 - 60a} = \frac{1}{2}a\sqrt{4(900 - 15a)} = \frac{1}{2}a \times 2\sqrt{900 - 15a} = \sqrt{900a^2 - 15a^3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵

ابتدا دامنه تعریف تابع را به دست می آوریم:

$$f(x) = \frac{[x]}{\sqrt{x-x^2}} \rightarrow x-x^2 > 0 \rightarrow x^2-x < 0 \rightarrow x(x-1) < 0 \rightarrow 0 < x < 1$$

$$0 < x < 1 \rightarrow [x] = 0 \rightarrow f(x) = \frac{0}{\sqrt{x-x^2}} \rightarrow f(x) = 0$$

پس برد تابع $f(x)$ شامل یک عدد صحیح است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶ کافی است زیر رادیکال را بزرگ تر مساوی صفر قرار دهیم.

$$\frac{1}{-f(x)} \geq 0 \rightarrow f(x) < 0 \rightarrow -2 < x < 0 \text{ یا } x \in (-2, 0)$$

در فاصله $(-2, 0)$ تابع $y = f(x)$ زیر محور x ها بوده و منفی می باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷ از آنجائی که دامنه تابع کل اعداد حقیقی است، پس مخرج نباید هیچگاه صفر شود، یعنی:

$$x^2 + ax + 1 = 0 \Rightarrow \text{ریشه نداشته باشد} \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow a^2 - 4 < 0$$

$$\Rightarrow a^2 < 4 \Rightarrow \sqrt{a^2} < \sqrt{4} \Rightarrow |a| < 2 \Rightarrow -2 < a < 2$$

$$a \text{ مقدار صحیح } = -1, 0, 1 \Rightarrow 3 \text{ مقدار}$$

توجه نمایید که قبل از ساده نمودن دامنه تابع را می یابیم.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸ دو حالت وجود دارد.

الف) مخرج عبارتی درجه اول باشد یعنی $m = 1$ که داریم:

$$f(x) = \frac{1-x}{3x+1} \Rightarrow 3x+1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$$

ب) مخرج ریشه مضاعف داشته باشد یعنی:

$$(m-1)x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow 9 - 4(m-1) = 0 \Rightarrow 9 - 4m + 4 = 0 \Rightarrow m = \frac{13}{4}$$

بنابراین برای m دو مقدار ۱ و $\frac{13}{4}$ وجود دارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹ ابتدا عبارت زیر رادیکال را به فرم مربع کامل تبدیل می کنیم و سپس با مشخص کردن محدوده عبارت زیر رادیکال، برد تابع

را به دست می آوریم.

$$x^2 - 2x + 5 = \underbrace{x^2 - 2x + 1}_{(x-1)^2} + 4 = (x-1)^2 + 4$$



$$(x-1)^2 \geq 0 \xrightarrow{+4} (x-1)^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + 4} \geq 2$$

$$\xrightarrow{+1} \sqrt{(x-1)^2 + 4} + 1 \geq 3 \Rightarrow f(x) \geq 3 \Rightarrow R_f = [3, +\infty)$$

بنابراین برد تابع بازه $[3, +\infty)$ می‌باشد و اعداد طبیعی ۱ و ۲ را شامل نمی‌شود.

$$\log_a^A \geq m \xrightarrow{0 < a < 1} A \leq a^m \quad \text{می‌دانیم: } \textcircled{۱} \textcircled{۲} \textcircled{۳} \textcircled{۴} \textcircled{۲۰}$$

برای پیدا کردن دامنه‌ی تعریف تابع، باید جلوی لگاریتم مثبت باشد و زیر رادیکال بزرگتر مساوی صفر باشد.

$$x - 3 > 0 \rightarrow x > 3 \quad (I)$$

$$\log_{0.25}^{x-3} \geq 0 \rightarrow x - 3 \leq (0.25)^0 \rightarrow x - 3 \leq 1 \rightarrow x \leq 4 \quad (II)$$

از اشتراک I و II به جواب $3 < x \leq 4$ می‌رسیم که شامل یک عدد طبیعی $x = 4$ است.

روش اول: $\textcircled{۱} \textcircled{۲} \textcircled{۳} \textcircled{۴} \textcircled{۲۱}$

چون یک چندجمله‌ای در زیر رادیکال با فرجه فرد قرار دارد، بنابراین رادیکال با فرجه فرد به ازای تمام مقادیر x تعریف شده است و فقط باید عبارت زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج را بزرگتر مساوی صفر قرار دهید.

$$\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2} \geq 0 \rightarrow \frac{4 - 9x^2}{2x^2} \geq 0 \rightarrow \begin{cases} \text{صورت} = 0 \rightarrow 9x^2 = 4 \rightarrow x^2 = \frac{4}{9} \rightarrow x = \pm \frac{2}{3} \\ \text{مخرج} = 0 \rightarrow 2x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & +\infty \\ \hline \text{عبارت} \geq 0 & - & 0 & + & 0 & - \end{array} \rightarrow x \in \left[-\frac{2}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{2}{3}\right]$$

روش دوم:

اگر $x = 1$ باشد زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج منفی می‌شود بنابراین گزینه‌های اول و سوم که شامل $x = 1$ هستند حذف می‌شوند در ضمن $x = 0$ مخرج را صفر می‌کند و گزینه دوم که شامل $x = 0$ است نیز حذف می‌شود.

جلوی لگاریتم باید مثبت باشد پس $x > 0$ است. عبارت داخل جزء صحیح به خاطر رادیکال با فرجه‌ی زوج منفی نمی‌باشد در ضمن اگر عبارت داخل جزء صحیح، صفر یا بین صفر و یک باشد مخرج را صفر می‌کند پس عبارت داخل جزء صحیح باید بزرگتر مساوی یک باشد.

$$\sqrt{\log_x^x} \geq 1 \rightarrow \log_x^x \geq 1 \rightarrow \log_x^x \geq \log_2^2 \rightarrow x \geq 2$$

از اشتراک $x > 0$ و $x \geq 2$ به جواب $x \geq 2$ می‌رسیم که گزینه‌ی چهارم زیر مجموعه‌ای از جواب است.

چون دامنه تابع f به صورت $\mathbb{R} - \{5, b\}$ است، پس $x = 5$ ریشه مخرج f است. $\textcircled{۱} \textcircled{۲} \textcircled{۳} \textcircled{۴} \textcircled{۲۳}$

$$5^2 + 5a - 10 = 0 \Rightarrow a = -3$$

با جای گذاری $a = -3$ ، مخرج تابع f را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا b نیز به دست آید:

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -2 \Rightarrow b = -2 \end{cases}$$

با جای گذاری $a = -3$ و $b = -2$ ، معادله $f(c) = 1$ را حل می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^2 - 8x + 3}{x^2 - 3x - 10} \xrightarrow{f(c)=1} c^2 - 8c + 3 = c^2 - 3c - 10 \Rightarrow 5c = 13 \Rightarrow c = \frac{13}{5} = 2.6$$

$\textcircled{۱} \textcircled{۲} \textcircled{۳} \textcircled{۴} \textcircled{۲۴}$

$$f(x) = \frac{b}{x+3} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$$

چون دو تابع برابرند پس دامنه تابع g هم باید به صورت $D_g = \mathbb{R} - \{-3\}$ باشد، بنابراین مخرج تابع g باید ریشه مضاعف $x = -3$ داشته باشد، که داریم:

$$x^2 + cx + d = (x + 3)^2 \Rightarrow x^2 + cx + d = x^2 + 6x + 9 \Rightarrow c = 6, d = 9$$



$$g(x) = \frac{x-a}{(x+3)^2} \Rightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{b}{x+3} = \frac{x-a}{(x+3)^2} \Rightarrow b = \frac{x-a}{x+3}$$

$$\Rightarrow x-a = bx + 3b \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ -a=3 \Rightarrow a=-3 \end{cases} \Rightarrow \frac{abc}{d} = \frac{-3 \times 1 \times 6}{9} = -2$$

چون تابع کسری است و دامنه تابع، مجموعه اعداد حقیقی است پس مخرج کسر هیچ گاه صفر نمی شود و داریم:

$$(m-1)x^2 + (2m-1)x - 1 \neq 0 \rightarrow \Delta = (2m-1)^2 - 4(m-1)(-1) < 0$$

$$\rightarrow 4m^2 - 4m + 1 + 4m - 4 < 0 \rightarrow 4m^2 - 3 < 0 \rightarrow 4m^2 < 3$$

$$\rightarrow m^2 < \frac{3}{4} \rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} < m < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۵

در توابع گویا اعدادی که مخرج کسر را صفر می کنند در دامنه تابع قرار ندارند. بنابراین اعداد $\frac{1}{p}$ و $\frac{1}{q}$ مخرج تابع $f(x)$ را صفر می کنند.

$$x=1 \Rightarrow m \times 1^2 - 6 \times 1 + n = 0 \Rightarrow m - 6 + n = 0 \Rightarrow m + n = 6 \quad (1)$$

$$x=\frac{1}{2} \Rightarrow m \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6 \times \frac{1}{2} + n = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}m - 3 + n = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}m + n = 3 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2),(1)} \begin{cases} m+n=6 \\ -\frac{1}{4}m+n=-3 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{4}m=3 \Rightarrow m=4 \Rightarrow n=2$$

بنابراین ضابطه تابع f به صورت $f(x) = \frac{2x+7}{4x^2-6x+2}$ می باشد. اکنون به محاسبه $f(-\frac{1}{2})$ می پردازیم:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 7}{4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 2} = \frac{6}{6} = 1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۷

زیر رادیکال باید بزرگ تر مساوی صفر باشد.

$$4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

در ضمن مخرج نباشد صفر باشد:

$$\left[\frac{x}{2}\right] = 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{x}{2} < 2 \Rightarrow 2 \leq x < 4$$

$$D_f = [-2, 2] - [2, 4) = [-2, 2) = [a, b) \rightarrow b - a = 2 - (-2) = 4$$

با در نظر گرفتن دامنه تابع از روش شکل و از روی ضابطه داریم:

$$f(x) = \sqrt{x+a} + b \Rightarrow x+a \geq 0 \Rightarrow x \geq -a \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow -a = -2 \Rightarrow a = 2 \\ x \geq -2 \text{ از روی شکل} \end{array} \right\}$$

$$f(x) = \sqrt{x+2} + b \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow f(-2) = -1 \Rightarrow \sqrt{-2+2} + b = -1 \Rightarrow b = -1$$

$$f(x) = \sqrt{x+2} - 1 \Rightarrow c = f(7) \Rightarrow c = \sqrt{9} - 1 = 3 - 1 = 2 \Rightarrow c = 2$$

$$a + b + c = 2 - 1 + 2 = 3$$

چون $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$ می باشد پس عبارت درجه دوم مخرج کسر باید ریشه مضاعف ۳ داشته باشد، بنابراین داریم:

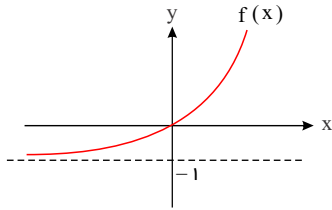
$$2(x-3)^2 = 2x^2 + ax + b \rightarrow 2(x^2 - 6x + 9) = 2x^2 + ax + b$$



$$\rightarrow 2x^2 - 12x + 18 = 2x^2 + ax + b \rightarrow \begin{cases} a = -12 \\ b = 18 \end{cases} \rightarrow a - b = -30$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۰

با توجه به نمودار تابع $f(x) = 3^x - 1$ ، جواب $f(x) = 0$ برابر $x = 0$ است.



$$\frac{(x+1)f(x)}{(x+2)} \geq 0 \Rightarrow$$

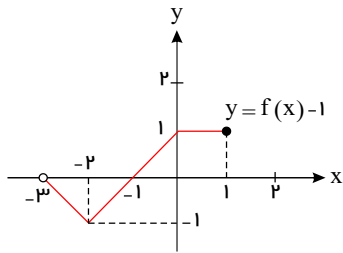
x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f(x)$	-	-	-	-	+
$x+1$	-	-	0	+	+
$x+2$	-	0	+	+	+
عبارت ≥ 0	-	ن	+	0	+

$$\Rightarrow D_g = (-2, -1] \cup [0, +\infty)$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۱ برای محاسبه دامنه تابع $y = \sqrt{f(x) - 1}$ ، باید زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$$f(x) - 1 \geq 0$$

با استفاده از نمودار $y = f(x - 1)$ ، نمودار $y = f(x) - 1$ را رسم می‌کنیم. برای این منظور باید نمودار داده شده را یک واحد به چپ و یک واحد به پایین منتقل کنیم. نمودار حاصل به صورت زیر خواهد بود:



با توجه به نمودار، نامعادله $f(x) - 1 \geq 0$ فقط در فاصله $[-1, 1]$ برقرار است، پس دامنه تابع بازه $[-1, 1]$ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۲

$$f(x) = \frac{1}{(|x| + 1)|x|} \Rightarrow (|x| + 1)|x| = 0 \Rightarrow \begin{cases} |x| + 1 = 0 \rightarrow \text{غیر ممکن} \\ |x| = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\} \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{|x|} \Rightarrow |x| = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0\}$$

با توجه به اینکه $|x|$ عبارتی نامنفی است و $x \neq 0$ ، پس هر دو تابع مقادیر مثبتی دارند و دامنه‌های f و g نمی‌توانند زیرمجموعه برد آنها باشند. بنابراین فقط گزینه ۳ صحیح است.

$$D_f = D_g = \mathbb{R} - \{0\}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۳

$$f(x) = 3x + 2, D_f = [-1, 2] \Rightarrow -1 \leq x \leq 2 \Rightarrow -3 \leq 3x \leq 6$$

$$-3 + 2 \leq 3x + 2 \leq 6 + 2 \Rightarrow -1 \leq f(x) \leq 8 \Rightarrow R_f = [-1, 8]$$

$$\Rightarrow D_g = [-1, 8] \Rightarrow -1 \leq x \leq 8 \Rightarrow -1 - 1 \leq x - 1 \leq 8 - 1$$

$$\Rightarrow -2 \leq x - 1 \leq 7 \Rightarrow -1 \leq \frac{x-1}{2} \leq 3.5 \Rightarrow -1 \leq g(x) \leq 3.5$$

$$R_g = [-1, 3, 5] \Rightarrow \text{بزرگ ترین عضو صحیح} = 3$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۴

$$(a-b, b), (a-b, a-3) \xrightarrow{\text{شرط تابع بودن}} b = a-3 \quad (1)$$

$$D_f = \{a, a-b, b, a+2\} \xrightarrow{b=a-3} \{a, 3, a-3, a+2\}$$

$$R_f = \{-4b, b, a, b+4\} \xrightarrow{b=a-3} \{-4a+12, a-3, a, a+1\}$$

$$D_f = R_f \Rightarrow \begin{cases} a+1=3 \\ -4a+12=a+2 \end{cases} \Rightarrow a=2 \xrightarrow{(1)} b=-1 \Rightarrow a+b=1$$

توجه کنید که $a+2$ نمی تواند با $a+1$ برابر باشد.

همانطور که می دانید عبارت جلوی لگاریتم باید مثبت باشد، پس داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۵

$$x \cdot f(x) > 0 \xrightarrow{x \text{ و } f(x) \text{ هم علامت اند.}} \begin{cases} x > 0 \\ f(x) > 0 \end{cases} \rightarrow x \in (1, 3)$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ f(x) < 0 \end{cases} \rightarrow x \in (-2, 0)$$

بنابراین دامنه تابع $y = \log(x \cdot f(x))$ برابر $(-2, 0) \cup (1, 3)$ است.

دامنه یک تابع کسری گویا وقتی تمامی اعداد حقیقی است که مخرج کسر فاقد ریشه حقیقی باشد، یعنی برای عبارت درجه ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۶

دوم مخرج، باید $\Delta < 0$ باشد، لذا داریم:

$$\Delta < 0 \Rightarrow 4(a+1)^2 - 4(1)(9a+5) < 0 \Rightarrow 4(a^2 + 2a + 1 - 9a - 5) < 0$$

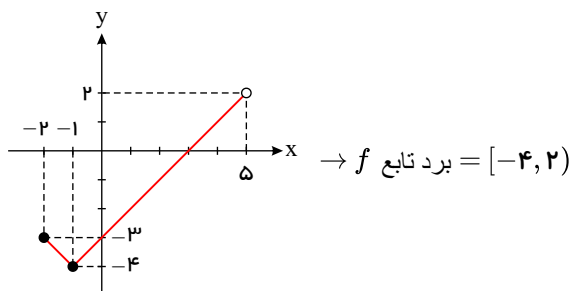
$$\Rightarrow a^2 - 7a + 6 < 0 \Rightarrow (a-1)(a-6) < 0 \Rightarrow 1 < a < 6$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۷ شکستگی تابع در $x = -1$ (ریشه داخل قدرمطلق) اتفاق می افتد.

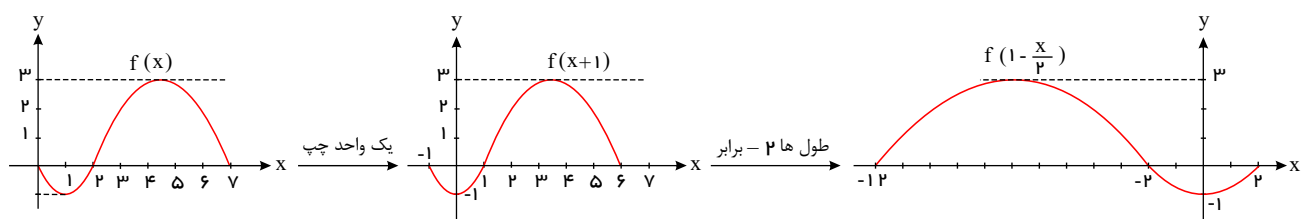
نمودار تابع f را در این فاصله رسم می کنیم:

$$f(x) = |x+1| - 4 \rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -2 & -1 & 5 \\ \hline y & -3 & -4 & 2 \end{array}$$

با توجه به نمودار به راحتی می توانیم برد تابع را به دست آوریم:



۱ ۲ ۳ ۴ ۳۸ نمودار $f(x+2)$ را دو واحد به راست منتقل می کنیم تا نمودار $f(x)$ حاصل شود.



برای تعیین دامنه $\sqrt{x f(1 - \frac{x}{2})}$ باید نامعادله زیر را حل کنیم.



$$xf\left(1 - \frac{x}{2}\right) \geq 0$$

x	-۱۲	-۲	۰	۲
x	-	-	۰	+
$f\left(1 - \frac{x}{2}\right)$	۰	+	۰	-
$xf\left(1 - \frac{x}{2}\right)$	۰	-	۰	-

$\rightarrow D_f = [-2, 0] \cup \{-12, 2\}$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۹

زیر رادیکال باید بزرگتر مساوی صفر باشد.

$$f(x) = \sqrt{(a^2 - 4)x^2 + ax + 6} \rightarrow (a^2 - 4)x^2 + ax + 6 \geq 0$$

جواب یک نامعادله درجه دوم هیچ گاه نمی تواند کوچکتر مساوی یک ریشه اش باشد (می تواند $\mathbb{R}$ یا یک تک عدد یا تهی یا بین دو ریشه یا اجتماع خارج دو ریشه باشد) پس عبارت زیر رادیکال نمی تواند درجه دوم باشد و ضریب x^2 باید صفر باشد، داریم:

$$a^2 - 4 = 0 \rightarrow a = \pm 2$$

$$۱) a = 2 \rightarrow f(x) = \sqrt{2x + 6} \rightarrow 2x + 6 \geq 0 \rightarrow 2x \geq -6 \rightarrow x \geq -3$$

$$\rightarrow D_f = [-3, +\infty) \text{ (غیر قابل قبول)}$$

$$۲) a = -2 \rightarrow f(x) = \sqrt{-2x + 6} \rightarrow -2x + 6 \geq 0 \rightarrow 6 \geq 2x \rightarrow 3 \geq x$$

$$\rightarrow D_f = (-\infty, 3]$$

پس $a = -2$, $b = 3$ و در نتیجه $a + b = 1$ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۰ ابتدا ضابطه تابع f را تعیین می کنیم، برای این کار معادله خط گذرنده از نقاط $(0, 4)$ و $(2, 0)$ و همچنین خط گذرنده از نقاط $(0, 4)$ و $(-4, 0)$ را به دست می آوریم.

$$(0, 4), (2, 0) \Rightarrow \frac{y - 4}{x} = \frac{4}{-2} = -2 \rightarrow y = -2x + 4$$

$$(0, 4), (-4, 0) \Rightarrow \frac{y - 4}{x} = \frac{4}{4} = 1 \rightarrow y = x + 4$$

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 & x < 0 \\ -2x + 4 & x \geq 0 \end{cases}, \quad g(x) = \sqrt{2 - |f(x)|} \Rightarrow 2 - |f(x)| \geq 0 \Rightarrow |f(x)| \leq 2$$

$$\Rightarrow -2 \leq f(x) \leq 2$$

$$x < 0 \Rightarrow -2 \leq x + 4 \leq 2 \Rightarrow -2 - 4 \leq x \leq 2 - 4 \Rightarrow -6 \leq x \leq -2 \xrightarrow{x < 0} -6 \leq x \leq -2 \quad (۱)$$

$$x \geq 0 \Rightarrow -2 \leq -2x + 4 \leq 2 \Rightarrow -6 \leq -2x \leq -2 \xrightarrow{\div (-2)} 3 \geq x \geq 1 \xrightarrow{x \geq 0} 1 \leq x \leq 3 \quad (۲)$$

$$\text{جواب نهایی: } (۱) \cup (۲) \Rightarrow [-6, -2] \cup [1, 3]$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۱ برای محاسبه پارامتر a و b ابتدا باید مراحل تعیین دامنه تابع f را طی نمایم:

$$\text{زیر رادیکال} > 0 \rightarrow 2x^2 - 6x + a > 0$$

عبارت درجه دو باید دو ریشه داشته باشد که یکی از آن ها $x = 1$ خواهد بود. زیرا بر اساس دامنه مطرح شده در متن سوال جدول تعیین علامت به صورت زیر می باشد:

x	۱	b
$2x^2 - 6x + a$	+	-

$$2x^2 - 6x + a \stackrel{x=1}{=} 0 \rightarrow 2 - 6 + a = 0 \rightarrow a = 4$$



$$2x^2 - 6x + 4 = 0 \rightarrow 2(x^2 - 3x + 2) = 0 \rightarrow 2(x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

پس ریشه دوم این عبارت درجه دو $x=2$ می باشد که همان پارامتر b است.

$$\begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow a \times b = 4 \times 2 = 8$$

زیر رادیکال باید بزرگتر مساوی صفر باشد. (۱) (۲) (۳) (۴) (۴۲)

$$ax + b \geq 0 \rightarrow ax \geq -b \xrightarrow[a > 0]{D_f: x \geq -2} x \geq -\frac{b}{a} \rightarrow \frac{-b}{a} = -2 \rightarrow 2a = b \rightarrow f(x) = 3 + \sqrt{ax + 2a}$$

محل تلاقی نمودار تابع و خط $2y - 4x = 1$ روی محور عرض است پس $x=0$ است.

$$x=0 \xrightarrow{2y-4x=1} 2y=1 \rightarrow y=\frac{1}{2} \rightarrow \left| \begin{matrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \right|$$

$$\left| \begin{matrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \right| \xrightarrow{f(x)=3+\sqrt{ax+2a}} \frac{1}{2} = 3 + \sqrt{2a} \rightarrow 2 = \sqrt{2a} \rightarrow 2a = 4 \rightarrow a=2, b=4$$

$$\text{پس: } f(a+b) = f(6) = 3 + \sqrt{12+4} = 7$$

باید دامنه دو تابع یکسان باشد یعنی $D_f = D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$ پس باید مخرج تابع f به ازای $x=-1$ صفر شود. (۱) (۲) (۳) (۴) (۴۳)

$$2x^3 - c = 0 \xrightarrow{x=-1} -2 - c = 0 \Rightarrow c = -2$$

باید ضابطه دو تابع به ازای هر x از دامنه تابع یکسان باشد.

$$f(x) = g(x) = 2 \Rightarrow \frac{ax^3 + b}{2x^3 + 2} = 2 \Rightarrow ax^3 + b = 4x^3 + 4 \Rightarrow a=4, b=4$$

$$\text{پس: } a+b+c = 4+4-2 = 6$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۴۴)

$$f(x) = (x-1)\sqrt{1-x} \Rightarrow 1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow D_f = (-\infty, 1]$$

$$1 \text{ گزینه } g(x) = \sqrt{-(1-x)^2} \Rightarrow -(1-x)^2 \geq 0 \Rightarrow (1-x)^2 \leq 0 \Rightarrow (1-x)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow D_g = \{1\} \Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow f \text{ و } g \text{ مساوی نیستند.}$$

$$2 \text{ گزینه } g(x) = \sqrt{(1-x)^3} \Rightarrow (1-x)^3 \geq 0 \Rightarrow 1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow D_g = (-\infty, 1] = D_f$$

$$g(x) = \sqrt{(1-x)^2(1-x)} = |1-x|\sqrt{1-x} \xrightarrow{x \leq 1} g(x) = (1-x)\sqrt{1-x} \neq f(x)$$

$$\Rightarrow f \text{ و } g \text{ برابر نیستند.}$$

$$3 \text{ گزینه } g(x) = \sqrt{(x-1)^3} \Rightarrow (x-1)^3 \geq 0 \Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow D_g = [1, +\infty)$$

$$\Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow f \text{ و } g \text{ برابر نیستند.}$$



۴ گزینه $g(x) = -\sqrt{(1-x)^3} \Rightarrow D_g = D_f = (-\infty, 1]$

$$g(x) = -\sqrt{(1-x)^2(1-x)} = -|1-x|\sqrt{1-x} \xrightarrow{x \leq 1} g(x) = -(1-x)\sqrt{1-x}$$

$\Rightarrow g(x) = (x-1)\sqrt{1-x} = f(x) \Rightarrow f$ و g برابرند.

شرط آنکه دو تابع مساوی باشند، آن است که: ۱ ۲ ۳ ۴ ۴۵

۱- دامنه دو تابع یکسان باشد.

۲- برای هر x از دامنه، مقادیر دو تابع با هم برابر باشند.

این دو شرط باید هر دو برقرار باشند، یعنی اگر یکی برقرار نباشد، دو تابع مساوی نیستند.

۱) $D_f = D_g = R$, $f(-2) = 2$, $g(-2) = -2 \Rightarrow f(-2) \neq g(-2)$

۲) $D_f = D_g = R - \{0\}$, $f(-\frac{1}{2}) = 1$, $g(-\frac{1}{2}) = -1 \Rightarrow f(-\frac{1}{2}) \neq g(-\frac{1}{2})$

۴) $D_f = R$, $D_g = R - \{0\} \Rightarrow D_f \neq D_g$

۳) $D_f = R$, $|x| + 1 = 0 \Rightarrow |x| = -1$ معادله جواب ندارد $\Rightarrow D_g = R \Rightarrow D_f = D_g = R$

$$f(x) = |x| - 1 , g(x) = \frac{x^2 - 1}{|x| + 1} \xrightarrow{x^2 = |x|^2} g(x) = \frac{|x|^2 - 1}{|x| + 1} = \frac{(|x| - 1)(|x| + 1)}{|x| + 1}$$

$\Rightarrow g(x) = |x| - 1 \Rightarrow f(x) = g(x)$

دو تابع f و g را برابر می‌نامیم هرگاه: ۱ ۲ ۳ ۴ ۴۶

الف) دامنه f و دامنه g با هم برابر باشند.

ب) برای هر x از این دامنه یکسان داشته باشیم: $f(x) = g(x)$

در گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ دامنه دو تابع داده شده برابر نیستند زیرا:

۲ گزینه $D_f = \mathbb{R}$, $D_g : x \geq 0 \Rightarrow D_g = [0, +\infty) \Rightarrow D_f \neq D_g$

۳ گزینه $D_f : x|x| \geq 0 \xrightarrow{|x| \geq 0} x \geq 0 \Rightarrow D_f = [0, +\infty)$, $D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_f \neq D_g$

۴ گزینه $D_f : x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$, $D_g : x \geq 0 \Rightarrow D_g = [0, +\infty) \Rightarrow D_f \neq D_g$

جواب گزینه ۱ می‌باشد زیرا:

$f(x) = (\sqrt{x})^2 \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow D_f = [0, +\infty)$

$g(x) = \sqrt{x|x|} \Rightarrow x|x| \geq 0 \xrightarrow{|x| \geq 0} x \geq 0 \Rightarrow D_g = [0, +\infty) \Rightarrow D_f = D_g = [0, +\infty)$

$x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow g(x) = \sqrt{x|x|} = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2 = f(x)$

f و g برابرند.

دو تابع زمانی برابرند که ابتدا $D_f = D_g$ و سپس برای هر x از این دامنه یکسان، $f(x) = g(x)$ باشد، بررسی گزینه‌ها: ۱ ۲ ۳ ۴ ۴۷

گزینه ۱: $\begin{cases} D_f = \mathbb{R} - \{0\} \\ D_g = \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow f$ و g برابر نیستند.



گزینه ۲: $\begin{cases} D_f = \mathbb{R} - \{\frac{k\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\} \\ D_g = \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow f \text{ و } g \text{ برابر نیستند.}$

گزینه ۳: $\begin{cases} D_f = \mathbb{R} - \{0\} \\ D_g = (0, +\infty) \end{cases} \Rightarrow f \text{ و } g \text{ برابر نیستند.}$

گزینه ۴: $\begin{cases} f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & x > 0 \\ \frac{x}{-x} = -1 & x < 0 \end{cases} \\ g(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1 & x < 0 \end{cases} \end{cases}, \begin{cases} D_g = \mathbb{R} - \{0\} \\ D_f = \mathbb{R} - \{0\} \end{cases} \Rightarrow f(x) = g(x)$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۸

$$f = g \Rightarrow \{(2, -1), (c, d)\} = \{(2a^2 - 1, b^2 + 1), (b + 1, 2a - 1)\}$$

با توجه به اینکه $b^2 + 1 = -1$ غیر ممکن است، پس داریم:

$$(b + 1, 2a - 1) = (2, -1) \Rightarrow b + 1 = 2 \Rightarrow b = 1, \quad 2a - 1 = -1 \Rightarrow a = 0$$

$$(c, d) = (2a^2 - 1, b^2 + 1) \Rightarrow (c, d) = (-1, 2) \Rightarrow c = -1, \quad d = 2 \Rightarrow c + d = -1 + 2 = 1$$

برای تساوی دو تابع باید دامنه‌های آنها یکسان و ضابطه‌هایشان نیز برابر باشد. پس با بررسی گزینه‌ها داریم:

گزینه ۱: $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x+2} \Rightarrow x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-2\} \\ g(x) = \frac{x-2}{x^2-4} \Rightarrow x^2-4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{\pm 2\} \end{cases}$

چون $D_f \neq D_g$ ، پس f و g برابر نیستند.

گزینه ۲: $\begin{cases} f(x) = \sqrt{4-x^2}, \quad 4-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_f = [-2, 2] \\ g(x) = \sqrt{2+x} \times \sqrt{2-x} \Rightarrow \begin{cases} 2+x \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \\ 2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_g = [-2, 2] \end{cases}$

$D_f = D_g$ ، پس داریم:

$$g(x) = \sqrt{2+x} \times \sqrt{2-x} = \sqrt{(2+x)(2-x)} = \sqrt{4-x^2} = f(x) \Rightarrow f \text{ و } g \text{ برابرند.}$$

گزینه ۳: $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2-5x+6}, \quad x^2-5x+6 \geq 0 \Rightarrow (x-2)(x-3) \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \text{ یا } x \geq 3 \\ \Rightarrow D_f = (-\infty, 2] \cup [3, +\infty) \\ g(x) = \sqrt{x-2} \times \sqrt{x-3} \Rightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \\ x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x \geq 3 \Rightarrow D_g = [3, +\infty) \end{cases}$

چون $D_f \neq D_g$ ، پس f و g برابر نیستند.

گزینه ۴: $\begin{cases} f(x) = [x^2] \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \\ g(x) = [x]^2 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} \end{cases}$

$$x = \sqrt{2} \Rightarrow f(\sqrt{2}) = [(\sqrt{2})^2] = [2] = 2, \quad g(\sqrt{2}) = [\sqrt{2}]^2 = 1^2 = 1$$

چون $f(\sqrt{2}) \neq g(\sqrt{2})$ ، پس f و g برابر نیستند.

۵۰ ۱ ۲ ۳ ۴ در تابع $f(x) = \sqrt{[x] + [-x]}$ با توجه به اینکه می‌دانیم $[x] + [-x] = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z} \\ -1, & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ ، دامنه برابر $\mathbb{Z}$ و ضابطه



تابع برابر $f(x) = 0$ است. پس در گزینه‌ها باید به دنبال چنین تابعی بگردیم:

گزینه ۱: $y = 0, D_y = \mathbb{R}$

گزینه ۲: $y = \frac{1}{[x] + [-x] + 1}, D_y = \mathbb{Z}, y = 1$

گزینه ۳: $y = \sqrt{-\sin^2 \pi x}, -\sin^2 \pi x \geq 0 \Rightarrow \sin^2 \pi x = 0 \Rightarrow D_y = \mathbb{Z}, y = 0$

پس گزینه ۳، صحیح است. توجه کنید که سینوس زوایایی که مضرب صحیح π هستند برابر صفر است.

۵۱ (۱) (۲) (۳) (۴) از تساوی f و g نتیجه می‌گیریم که $b = -2$. برای انتخاب a باید حواسمان به دامنه دو تابع باشد. دامنه تابع f را در دو حالت زیر به دست می‌آوریم:

(۱) $a \geq -2$

x	$-\infty$	$b = -2$	a	$+\infty$
$(x-a)^2(x-b)$	-	0	+	+

$\rightarrow D_f = [-2, +\infty)$

(۲) $a < -2$

x	$-\infty$	a	$b = -2$	$+\infty$
$(x-a)^2(x-b)$	-	0	-	+

$\rightarrow D_f = \{a\} \cup [-2, +\infty)$

از طرفی چون $D_g = [-2, +\infty)$ است، پس برای آن که $D_f = D_g$ باشد، باید $a \in [-2, +\infty)$ باشد، پس:

$$a \geq -2 \xrightarrow{+b} a + b \geq \underbrace{-2 + b}_{-4} \Rightarrow a + b \geq -4$$

۵۲ (۱) (۲) (۳) (۴) دو تابع f و g به شرطی باهم برابرند که اولاً دامنه‌هایشان برابر باشند و ثانیاً به ازای هر x از دامنه‌ها $f(x) = g(x)$ باشد.

گزینه ۱: $D_f = \mathbb{R} - \{0\}, D_g = \mathbb{R} - \{0\}$

اکنون دو تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}, \quad g(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

پس $f(x) = g(x)$ است.

گزینه ۲: $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-1} \rightarrow \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 \geq x \\ x \geq 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x = 1 \rightarrow D_f = \{1\} \rightarrow f(x) = 0$

$g(x) = \sqrt{1-x} \times \sqrt{x-1} \rightarrow \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 \geq x \\ x \geq 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x = 1 \rightarrow D_g = \{1\} \rightarrow g(x) = 0$

پس $f(x) = g(x)$ است.

گزینه ۳: $f(x) = \sqrt{x^2 - x} \rightarrow x^2 - x \geq 0 \rightarrow x(x-1) \geq 0 \rightarrow D_f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$

$g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x-1} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x \geq 1 \rightarrow D_g = [1, +\infty)$



$f(x) \neq g(x)$ در نتیجه داریم: $D_f \neq D_g$

گزینه ۴ $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$

اکنون دو تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}$$

پس $f(x) = g(x)$ است.

برای این که از تابع $y = f\left(\frac{1+x}{2}\right)$ به تابع $y = f\left(\frac{1-x}{2}\right)$ برسیم، کافی است که به جای x قرار دهیم $(-x)$. این کار

یعنی این که نمودار را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.

ابتدا دامنه تابع $y = f(x)$ را می‌یابیم: (۵۴) ۱ ۲ ۳ ۴

$$-1 \leq x \leq 3 \rightarrow -2 \leq 2x \leq 6 \rightarrow -3 \leq 2x - 1 \leq 5$$

حال به کمک دامنه تابع $y = f(x)$ به دامنه $h(x) = f(3x + 2)$ می‌رسیم.

$$-3 \leq 3x + 2 \leq 5 \rightarrow -5 \leq 3x \leq 3 \rightarrow -\frac{5}{3} \leq x \leq 1$$

اگر نمودار تابع $y = f(2x - 1)$ را یک واحد به چپ منتقل کنیم، نمودار تابع (۵۵) ۱ ۲ ۳ ۴

$y = f(2(x + 1) - 1) = f(2x + 1)$ به دست می‌آید. اگر این نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y = f(-2x + 1)$

به دست می‌آید و اگر طول نقاط این نمودار را دو برابر کنیم یعنی به جای x جمله $\frac{1}{2}x$ قرار می‌دهیم. نمودار تابع $y = f(-x + 1)$ به دست می‌آید.

(۵۶) ۱ ۲ ۳ ۴

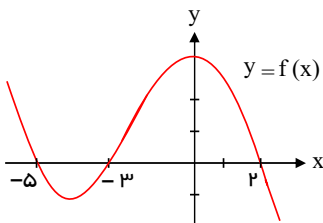
قرینه نسبت به محور y ها $f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{دو واحد به طرف } x \text{ های مثبت}} g(x) = \sqrt{-x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} h(x) = \sqrt{-(x-2)} = \sqrt{-x+2}$

تلاقی $\begin{cases} h(x) = \sqrt{-x+2} \\ y = x \end{cases} \rightarrow \sqrt{-x+2} = x \xrightarrow{\text{توان ۲}} -x+2 = x^2 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0$

غلق (در معادله صدق نمی‌کند) $\rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$ فق

(۵۷) ۱ ۲ ۳ ۴

اگر نمودار $f(x-2)$ را دو واحد به سمت چپ منتقل کنیم نمودار تابع $f(x)$ به دست می‌آید.



برای پیدا کردن دامنه‌ی تعریف $\sqrt{xf(x)}$ باید زیر رادیکال را بزرگ تر مساوی صفر قرار دهیم.

$xf(x) \geq 0 \rightarrow xy \geq 0$ باید هم علامت باشند $\rightarrow [-5, -3] \cup [0, 2]$

ابتدا ضابطه تابع خطی $g(x)$ را به دست می‌آوریم. برای این کار باید معادله خط گذرنده از دو نقطه $A(0, 3)$ و $B(3, 0)$ را (۵۸) ۱ ۲ ۳ ۴

به دست آوریم.

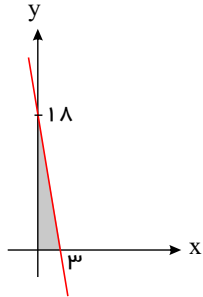


$$\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \rightarrow \frac{y - 3}{x} = \frac{3}{-3} = -1 \rightarrow y - 3 = -x \rightarrow y = -x + 3 \rightarrow g(x) = -x + 3 \rightarrow f(x) = -x + 5$$

$$\text{پس: } h(x) = 3(-(2x - 1) + 5) \rightarrow h(x) = -6x + 18$$

یک بار به x و بار دیگر به y صفر می‌دهیم:

$$x = 0 \rightarrow y = 18, \quad y = 0 \rightarrow x = 3$$



$$\rightarrow S = \frac{1}{2} \times 3 \times 18 = 27$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۹

روش اول:

$$A(-1, 3) \in f \Rightarrow f(-1) = 3, \quad 2x - 5 = -1 \Rightarrow x = 2$$

$$y(2) = 3f(-1) - 7 = 3 \times 3 - 7 = 2 \Rightarrow A'(2, 2) \Rightarrow a = 2, \quad b = 2 \Rightarrow a - b = 0$$

$$\text{پس: } y(2) = 3f(-1) - 7 = 3(3) - 7 = 2 \rightarrow A' \Big|_2^{a=2, b=2} \rightarrow a - b = 0$$

روش دوم: تابع f پنج واحد به سمت راست برده شده و سپس طول‌هایش نصف شده و عرض‌هایش ۳ برابر شده و نهایتاً ۷ واحد به پایین برده شده است.

$$\left| -1 \right|_3 \xrightarrow{\text{پنج واحد راست}} \left| 4 \right|_3 \xrightarrow{\text{طول‌ها نصف}} \left| 2 \right|_3 \xrightarrow{\text{عرض ۳ برابر}} \left| 2 \right|_9 \xrightarrow{\text{هفت واحد پایین}} A' \Big|_2$$

پس $a - b = 0$ است.

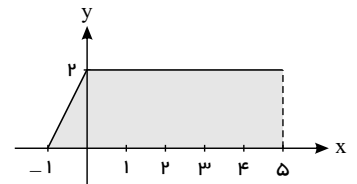
۱ ۲ ۳ ۴ ۶۰

$$y = f(x) \xrightarrow[\text{واحد انتقال به چپ}]{x \rightarrow x+1} f(x+1) \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور } y]{x \rightarrow -x} f(-x+1)$$

$$\xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور } x]{\frac{1}{4} \text{ انقباض عمودی یا ضرب در } \frac{1}{4}} -f(-x+1) \rightarrow y = -\frac{1}{4}f(-x+1)$$

$$\begin{aligned} x \geq 0 &\Rightarrow y = f(x-x) = f(0) = 2 \\ x < 0 &\Rightarrow y = f(x-(-x)) = f(2x) \end{aligned} \Rightarrow y = \begin{cases} 2 & x \geq 0 \\ f(2x) & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{مساحت } S = \frac{1}{2} (5 + 6) \times 2 = 11$$



نمودار $f(x)$ در راستای افقی با ضریب ۲ منبسط شده و سپس یک واحد به بالا رفته است، پس داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۶۲

$$f(x) \xrightarrow[\text{یک واحد به بالا}]{x \rightarrow \frac{1}{2}x} f\left(\frac{1}{2}x\right) \rightarrow f\left(\frac{1}{2}x\right) + 1 \Rightarrow g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + 1$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۶۳

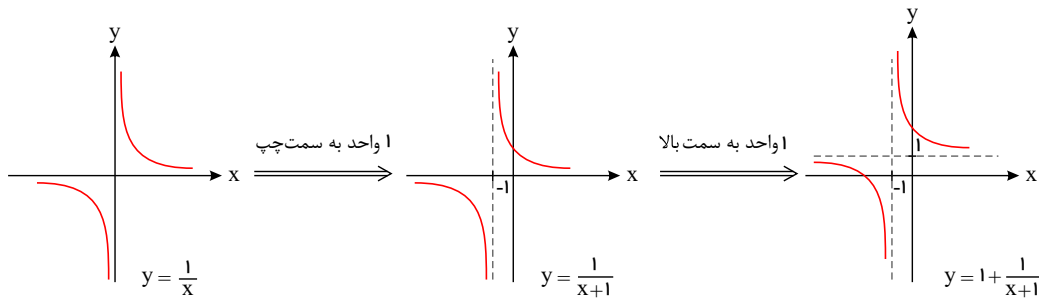
$$y = f(2-x) \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور } y]{x \rightarrow -x} y_1 = f(x+2) \xrightarrow[\text{واحد چپ } 2]{x \rightarrow x+2} y_2 = f(x+4) \xrightarrow[\text{طول ها } \frac{1}{3} \text{ برابر}]{\text{طول ها } \frac{1}{3} \text{ برابر}} g(x) = f(3x+4)$$

$$-1 \leq x \leq 2 \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور } y]{\text{قرینه نسبت به محور } y} -2 \leq x \leq 1 \xrightarrow[\text{واحد چپ } 2]{\text{واحد چپ } 2} -4 \leq x \leq -1 \xrightarrow[\text{طول ها } \frac{1}{3} \text{ برابر}]{\text{طول ها } \frac{1}{3} \text{ برابر}} -\frac{4}{3} \leq x \leq -\frac{1}{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۴

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} + \frac{1}{x+1} \rightarrow f(x) = \frac{1}{x+1} + 1$$

اکنون نمودار $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را یک واحد به سمت چپ و پس از آن یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم.



۱ ۲ ۳ ۴ ۶۵

نمودار دو تابع $y = a^x$ و $y = a^{-x}$ نسبت به محور y ها قرینه هستند، پس داریم:

$$(4a-2)\left(1-\frac{a}{2}\right) = 1 \rightarrow 4a - 2a^2 - 2 + a - 1 = 0 \rightarrow -2a^2 + 5a - 3 = 0$$

$$\rightarrow 2a^2 - 5a + 3 = 0 \rightarrow \text{مجموع ریشه ها } S = \frac{-b}{a} = -\frac{-5}{2} = \frac{5}{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۶

$$f(x) = \log_2(2x+4) = \log_2 2(x+2) = \log_2^2 + \log_2(x+2) = 1 + \log_2(x+2)$$

اکنون بررسی می‌کنیم که نمودار $y = \log_2(x-1)$ را چگونه به نمودار $y = 1 + \log_2(x+2)$ تبدیل کنیم:

$$y = 1 + \log_2(x-1) \xrightarrow[\text{واحد به چپ } 3]{x \rightarrow x+3} y = \log_2(x+2)$$

$$\xrightarrow[\text{واحد به سمت بالا } 1]{y \rightarrow y+1} y = 1 + \log_2(x+2)$$

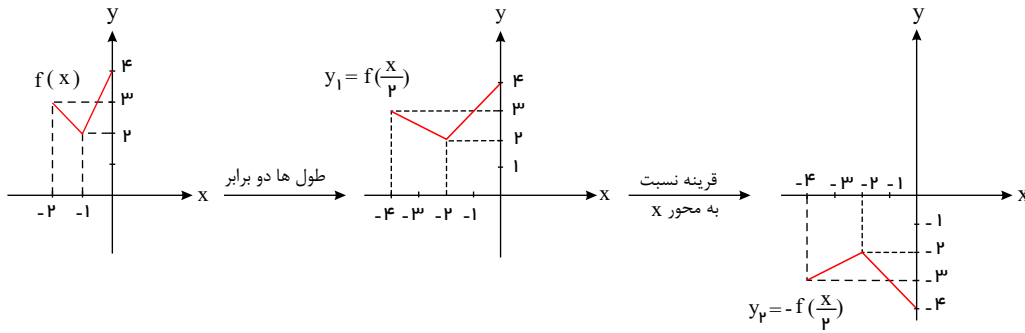
باید مراحل گفته شده را به صورت برعکس از انتها به ابتدا انجام دهیم، که داریم:

$$y = -|3x-12| = -3|x-4| \xrightarrow[\text{انقباض در راستای عمودی با ضریب } \frac{1}{3}]{\text{انقباض در راستای عمودی با ضریب } \frac{1}{3}} y = \frac{1}{3} \times (-3)|x-4| = -|x-4|$$

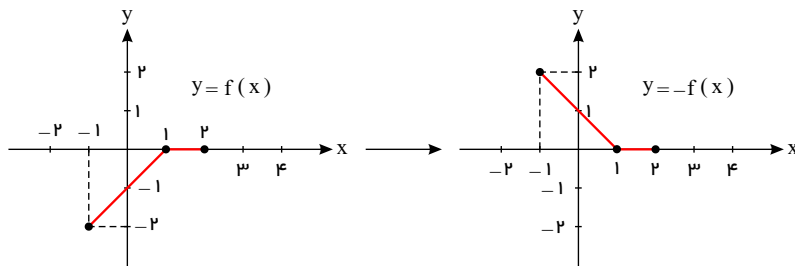
$$\xrightarrow[\text{محور ها } x]{\text{قرینه نسبت به } y} y = |x-4| \xrightarrow[\text{واحد انتقال به چپ } 2]{x \rightarrow x+2} y = |x+2-4| = |x-2|$$

نمودار $h(x) = f(x-1) - 2$ را یک واحد به چپ و سپس ۲ واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار $f(x)$ حاصل شود.

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۸



۶۹ ۱ ۲ ۳ ۴ برای پیدا کردن نمودار $y = f(x)$ از روی نمودار $y = f(x - 2) + 1$ ابتدا نمودار را دو واحد به طرف چپ و سپس یک واحد به طرف پایین انتقال می‌دهیم. در نهایت نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = -f(x)$ به دست آید.



۱ ۲ ۳ ۴ ۷۰

$$y = \sqrt{1 - 2x} \xrightarrow{\text{یک واحد به چپ}} y_1 = \sqrt{1 - 2(x + 1)} \xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}} y_p = \sqrt{-2x - 1} + 1$$

$$\begin{cases} y_p = \sqrt{-2x - 1} + 1 \\ y = x + 9 \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} \sqrt{-2x - 1} + 1 = x + 9 \rightarrow \sqrt{-2x - 1} = x + 8$$

$$\text{توان ۲} \rightarrow -2x - 1 = x^2 + 6x + 16 \rightarrow x^2 + 18x + 65 = 0 \rightarrow (x + 5)(x + 13) = 0$$

$$\begin{cases} x = -13 \text{ (در معادله صدق نمی‌کند.)} \\ x = -5 \xrightarrow{y=x+9} y = 4 \rightarrow A \begin{vmatrix} -5 & \alpha \\ 4 & \beta \end{vmatrix} \rightarrow \alpha + \beta = -1 \end{cases}$$

۷۱ ۱ ۲ ۳ ۴ می‌دانیم: برای اینکه ۳ واحد به سمت x های مثبت منتقل شود باید به جای $x - 3$ و برای اینکه به طرف y های

منفی منتقل شود باید به کل تابع عدد ۲- اضافه شود؛ بنابراین داریم:

$$y = -(x - 3)^2 + 2(x - 3) + 5 - 2 = -x^2 + 6x - 9 + 2x - 6 + 3 \Rightarrow y = -x^2 + 8x - 12$$

و برای اینکه این تابع بالای نیمساز ربع اول قرار گیرد باید:

$$-x^2 + 8x - 12 > x \Rightarrow x^2 - 7x + 12 < 0 \Rightarrow (x - 3) \cdot (x - 4) < 0 \Rightarrow 3 < x < 4$$

۷۲ ۱ ۲ ۳ ۴ روش اول: با توجه به نمودار تابع f ، دامنه آن بصورت $D_f = [-4, 7]$ می‌باشد. پس داریم:

$$y = 2f(2x - 1) \Rightarrow -4 \leq 2x - 1 \leq 7 \Rightarrow -4 + 1 \leq 2x - 1 + 1 \leq 7 + 1 \Rightarrow -3 \leq 2x \leq 8$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2} \leq x \leq 4 \Rightarrow \text{اعداد صحیح: } -1, 0, 1, 2, 3, 4 \Rightarrow \text{عدد ۶}$$

روش دوم: تابع f را باید یک واحد به سمت راست برده و سپس طول‌های نقاطش را نصف و عرض‌ها را دو برابر کنیم (دو برابر کردن عرض‌ها روی دامنه تاثیر ندارد).

$$-4 \leq x \leq 7 \xrightarrow{\text{یک واحد راست}} -3 \leq x \leq 8 \xrightarrow{\text{طول‌ها نصف}} -\frac{3}{2} \leq x \leq 4$$



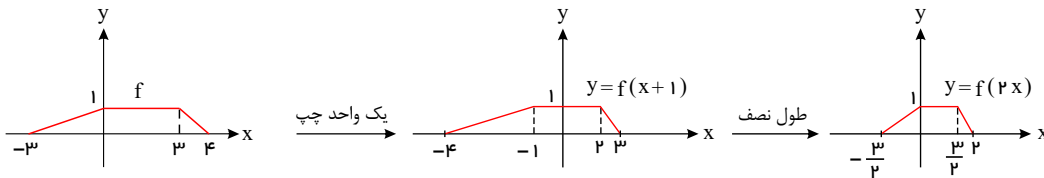
که اعداد صحیح آن عبارتند از ۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ۴

۷۳ ۱ ۲ ۳ ۴ با توجه به مراحل گفته شده داریم:

$$y = f(x) \xrightarrow[\substack{\text{قرینه نسبت به } y \text{ ها} \\ x \rightarrow -x}]{\substack{\text{۲ واحد به راست} \\ x \rightarrow x-2}} f(-x) \xrightarrow{x \rightarrow x-2} f(-(x-2)) = f(-x+2)$$

$$\xrightarrow[\text{انقباض عمودی با ضریب ۲}]{} g(x) = 2f(-x+2)$$

۷۴ ۱ ۲ ۳ ۴

برای رسم $f(x+1)$ باید $f(x)$ را یک واحد به چپ منتقل کنیم، همچنین برای رسم $f(2x)$ باید طول نقاط $f(x)$ را بر ۲ تقسیم کنیم، پس داریم:

$$g(x) = \begin{cases} f(x+1) & ; x \geq 0 \\ f(2x) & ; x < 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow S = \frac{(4.5 + 2) \times 1}{2} = \frac{6.5}{2} = \frac{13}{4}$$

۷۵ ۱ ۲ ۳ ۴ کافی است مرحله به مرحله انتقال‌ها را انجام دهیم:

$$y = 2|x+1| + 3 \xrightarrow[\substack{\text{یک واحد به سمت راست} \\ x \rightarrow x-1}]{\substack{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها} \\ y \rightarrow -y}} y = 2|x-1| + 3 \xrightarrow{y \rightarrow -y} y = -(2|x| + 3) = -2|x| - 3$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{۴ واحد به سمت بالا} \\ y \rightarrow y+4}]{} y = -2|x| - 3 + 4 \Rightarrow y = -2|x| + 1$$

حال نقاط تلاقی با محور x ها و y ها را به دست می‌آوریم:

$$\text{تلاقی با محور } x \text{ ها: } y = 0 \Rightarrow |x| = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{تلاقی با محور } y \text{ ها: } x = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$\Rightarrow \text{مجموع طول و عرض نقاط: } \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 1$$

۷۶ ۱ ۲ ۳ ۴

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{(\sqrt{x+2}+1)^2 - 2(\sqrt{x+2}+1) - 8}$$

$$= \sqrt{x+2+1+2\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+2}-2-8} = \sqrt{x-7}$$

واضح است نمودار تابع $f \circ g$ باید ۹ واحد به چپ و یک واحد به بالا انتقال یابد تا بر نمودار تابع g منطبق شود.۷۷ ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا دامنه $f(x)$ را به دست آورده و سپس از روی آن دامنه $g(x) = 3f(4x-2) - 3$ را به دست می‌آوریم:

$$-2 \leq x \leq 6 \Rightarrow -4 \leq 2x \leq 12 \Rightarrow -5 \leq 2x-1 \leq 11$$

پس دامنه $f(x)$ به صورت $[-5, 11]$ می‌باشد، برای به دست آوردن دامنه g داریم:

$$-5 \leq 4x-2 \leq 11 \Rightarrow -3 \leq 4x \leq 13 \Rightarrow -\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{13}{4}$$



۷۸ ۱ ۲ ۳ ۴ برای آنکه ضابطه‌ی تابع $y = f(x)$ را پیدا کنیم کافی است نمودار تابع $g(x)$ را دو واحد به سمت بالا و یک واحد به سمت

چپ ببریم.

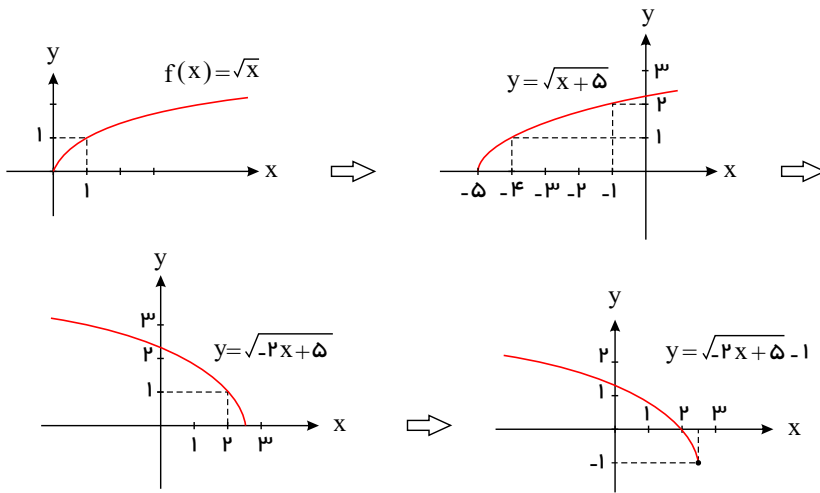
$$g(x) = (x-1)^2 \xrightarrow{\text{دو واحد به سمت بالا}} y = (x-1)^2 + 2 \xrightarrow{\text{یک واحد به سمت چپ}} f(x) = (x-1+1)^2 + 2 \rightarrow f(x) = x^2 + 2$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = (x-1)^2 + 2 \xrightarrow{x=0} \text{محل تلاقی با محور } y = 1 + 2 = 3$$

۷۹ ۱ ۲ ۳ ۴

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow x+5} y = \sqrt{x+5} \xrightarrow{x \rightarrow -2x} y = \sqrt{-2x+5} \xrightarrow{\text{یک واحد به پایین}} y = \sqrt{-2x+5} - 1$$

نمودار $f(x) = \sqrt{x}$ را ابتدا ۵ واحد به چپ منتقل می‌کنیم تا $y = \sqrt{x+5}$ حاصل شود. در نمودار حاصل، طول نقاط را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا $y = \sqrt{-2x+5}$ به دست آید. سپس در نهایت نمودار حاصل را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم.



۸۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$$f(x) = (x+1)^2 \xrightarrow{x \rightarrow x-2} y = (x-2+1)^2 = (x-1)^2 \xrightarrow{\text{یک واحد به پایین}} g(x) = (x-1)^2 - 1$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow (x+1)^2 = (x-1)^2 - 1 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2x + 1 - 1 \Rightarrow 4x = -1$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{4} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{1}{4} + 1\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

۸۱ ۱ ۲ ۳ ۴ باید مشخص کنیم با چه انتقال‌هایی تابع $y = f(x)$ به $y = -2f\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right) + y_0$ تبدیل می‌شود.

$$y = f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x - \frac{3}{2}} y_1 = f\left(x - \frac{3}{2}\right) \xrightarrow{x \rightarrow \frac{1}{2}x} y_2 = f\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right) \xrightarrow{\text{عرض ها } -2 \text{ برابر}} y_3 = -2f\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{یا پایین}} y_0 = -2f\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right) + y_0$$

$$\begin{array}{l} \text{عرض ها } -2 \text{ برابر} \\ \left| \begin{array}{l} 2x_0 + \frac{3}{2} \\ y_0 \end{array} \right| \xrightarrow{\text{طول ها دو برابر}} \left| \begin{array}{l} 4x_0 + 3 \\ y_0 \end{array} \right| \xrightarrow{\text{عرض ها } -2 \text{ برابر}} \left| \begin{array}{l} 4x_0 + 3 \\ -2y_0 \end{array} \right| \xrightarrow{\text{عرض با } y_0 \text{ جمع شود}} \left| \begin{array}{l} 4x_0 + 3 \\ -y_0 \end{array} \right| \end{array}$$

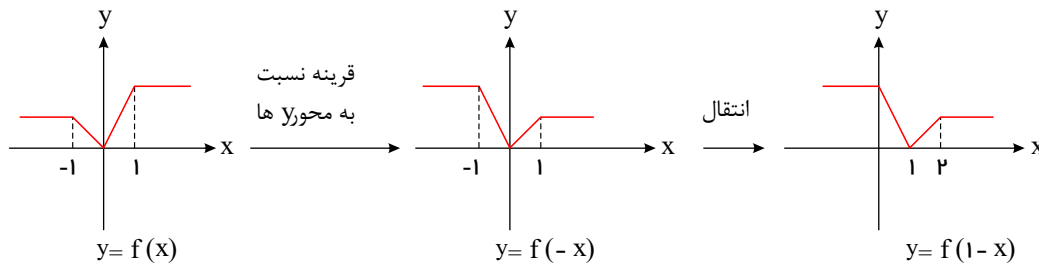
$$y = x^2 - x - 3 \xrightarrow[\text{واحد به چپ}]{x \rightarrow x+2} y = (x+2)^2 - (x+2) - 3 \xrightarrow[\text{واحد پایین}]{9} y = (x+2)^2 - (x+2) - 3 - 9$$

نمودار زیر محور x ها قرار دارد یعنی باید نامعادله $y < 0$ را حل کنیم.

$$y < 0 \Rightarrow (x+2)^2 - (x+2) - 12 < 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 - x - 2 - 12 < 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x - 10 < 0 \Rightarrow (x-2)(x+5) < 0 \Rightarrow -5 < x < 2 \Rightarrow x \in (-5, 2)$$

ابتدا نمودار تابع $y = f(x)$ را با انتقال نمودار $y = f(x-1)$ به اندازه‌ی یک واحد به سمت چپ رسم می‌کنیم. پس نمودار تابع $f(x)$ را نسبت به محور y ها قرینه کرده و نمودار حاصل را به اندازه‌ی یک واحد به سمت راست رسم می‌کنیم.



برای رسم نمودار تابع $y = -f(-x+1)$ باید مراحل زیر را انجام داد:

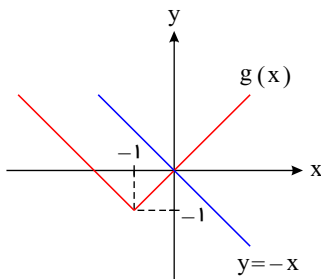
ابتدا نمودار ۱ واحد به سمت چپ انتقال داده شود، تا به تابع $y = f(x+1)$ برسیم و نمودار نسبت به محور y ها قرینه شود تا به نمودار $y = f(-x+1)$ برسیم.

سپس برای اینکه نمودار $y = -f(-x+1)$ را رسم کنید باید نمودار را نسبت به محور x ها قرینه کنید. که در نهایت به گزینه «۳» می‌رسیم.

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۵

$$f(x) = |x-1| - 4 \Rightarrow g(x) = |x-1+2| - 4 + 3 \Rightarrow g(x) = |x+1| - 1$$

نمودار دو تابع $g(x) = |x+1| - 1$ و نیمساز ربع چهارم یعنی $y = -x$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار دو تابع، در بازه $(0, +\infty)$ نمودار تابع g بالاتر از نمودار نیمساز ربع چهارم است.

البته به جای رسم نمودار دو تابع می‌توان نامعادله $|x+1| - 1 > -x$ را حل کرد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۶

$$f(x) = x^3 \xrightarrow[\text{واحد به پایین}]{4} h(x) = x^3 - 4 \xrightarrow[\text{واحد به راست}]{2} g(x) = (x-2)^3 - 4$$

حال معادله $f(x) = g(x)$ را حل می‌کنیم تا نقاط تلاقی دو نمودار را بیابیم:

$$g(x) = f(x) \Rightarrow (x-2)^3 - 4 = x^3 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 12 = x^3 \Rightarrow 6x^2 - 12x + 12 = 0 \Rightarrow 6(x^2 - 2x + 2) = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4(2)(1) \Rightarrow \Delta = -4 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد.}$$

اگر $y = f(x)$ را ۲ واحد به سمت چپ انتقال دهیم، به $y = f(x+2)$ تبدیل می‌شود، پس کافی است که در ضابطه

$f(x+1)$ به جای x ، $x+1$ را قرار دهیم:



$$f(x+1) = x^2 - 3x = x(x-3) \Rightarrow f(x+2) = (x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$$

حال نمودار جدید را ۴ واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم:

$$y = f(x+2) - 4 = x^2 - x - 6$$

تقاطع این نمودار با محور x ها برابر است با:

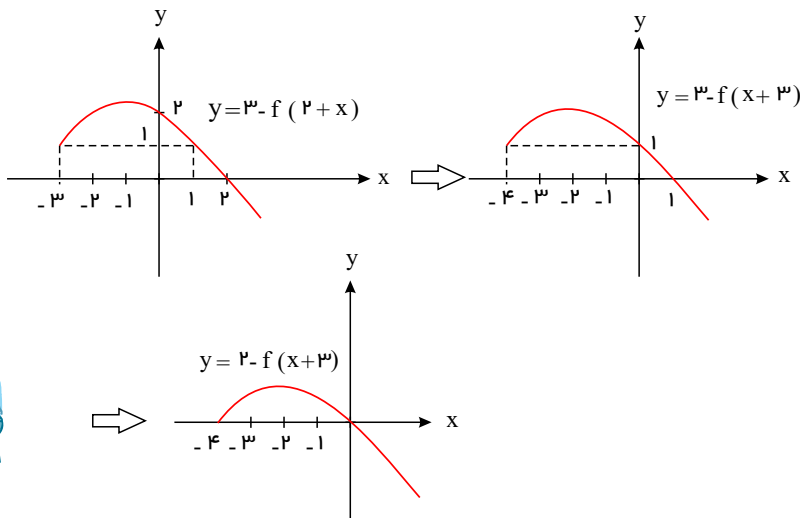
$$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ و } -2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۸

$$y = 3 - f(2-x) \xrightarrow{x \rightarrow -x} y = 3 - f(2+x) \xrightarrow{x \rightarrow x+1} y = 3 - f(2+x+1)$$

قرینه نسبت به y ها ۱ واحد انتقال به چپ

$$\Rightarrow y = 3 - f(x+3) \xrightarrow{\text{یک واحد انتقال به پایین}} y = 2 - f(x+3)$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۸۹ با توجه به صورت سوال دستور همه گزینه‌ها را اجرا می‌کنیم.

گزینه ۱:

$$\begin{cases} x \rightarrow -x \Rightarrow \sqrt{x} \rightarrow \sqrt{-x} \\ x \rightarrow x-1 \Rightarrow \sqrt{-x} \rightarrow \sqrt{-(x-1)} = \sqrt{-x+1} \\ x \rightarrow \frac{1}{3}x \Rightarrow \sqrt{-x+1} \Rightarrow \sqrt{-\frac{1}{3}x+1} \end{cases}$$

گزینه ۲:

$$\begin{cases} x \rightarrow x+1 \Rightarrow \sqrt{x} \rightarrow \sqrt{x+1} \\ x \rightarrow -x \Rightarrow \sqrt{x+1} \rightarrow \sqrt{-x+1} \\ x \rightarrow \frac{1}{3}x \Rightarrow \sqrt{-x+1} \rightarrow \sqrt{-\frac{1}{3}x+1} \end{cases}$$

گزینه ۳:

$$\begin{cases} x \rightarrow -x \Rightarrow \sqrt{x} \rightarrow \sqrt{-x} \\ x \rightarrow \frac{1}{3}x \Rightarrow \sqrt{-x} \rightarrow \sqrt{-\frac{1}{3}x} \\ x \rightarrow x+1 \Rightarrow \sqrt{-\frac{1}{3}x} \rightarrow \sqrt{-\frac{1}{3}(x+1)} = \sqrt{-\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}} \end{cases}$$



گزینه ۴:
$$\begin{cases} x \rightarrow -x \Rightarrow \sqrt{x} \rightarrow \sqrt{-x} \\ x \rightarrow \frac{1}{3}x \Rightarrow \sqrt{-x} \rightarrow \sqrt{-\frac{1}{3}x} \\ x \rightarrow x-3 \Rightarrow \sqrt{-\frac{1}{3}x} \rightarrow \sqrt{-\frac{1}{3}(x-3)} = \sqrt{-\frac{1}{3}x+1} \end{cases}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۹۰

۴ واحد به سمت بالا $f(x) = (x-1)^2 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} g(x) = -(-x-1)^2 \xrightarrow{\text{۴ واحد به سمت بالا}} h(x) = -(-x-1)^2 + 4$
 تلاقی: $(x-1)^2 = -(-x-1)^2 + 4 \rightarrow x^2 + 1 - 2x = -x^2 - 1 - 2x + 4 \rightarrow 2x^2 = 2 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = 1, x = -1$

۱ ۲ ۳ ۴ ۹۱

۱۶ واحد در جهت مثبت محور y ها $f(x) = (x-1)^2 - 1 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} g(x) = -(x-1)^2 + 1 \xrightarrow{\text{۱۶ واحد در جهت مثبت محور } y \text{ ها}} h(x) = -(x-1)^2 + 1 + 16$
 $\rightarrow h(x) = -(x-1)^2 + 17$

تلاقی: $(x-1)^2 - 1 = -(x-1)^2 + 17 \rightarrow 2(x-1)^2 = 18 \rightarrow (x-1)^2 = 9$
 $\rightarrow \begin{cases} x-1=3 \rightarrow x=4 \rightarrow y=8 \\ x-1=-3 \rightarrow x=-2 \end{cases}$ غ ق ق ($x > 1$)

پس $A \begin{vmatrix} 4 \\ 8 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow AB = \sqrt{(4-0)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

۹۲ ۱ ۲ ۳ ۴

۲ واحد در جهت مثبت محور y ها $f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{۲ واحد در جهت مثبت محور } y \text{ ها}} g(x) = \sqrt{x-12} \xrightarrow{\text{۲ واحد در جهت مثبت محور } y \text{ ها}} h(x) = \sqrt{x-12} + 2$

تلاقی: $\sqrt{x} = \sqrt{x-12} + 2$

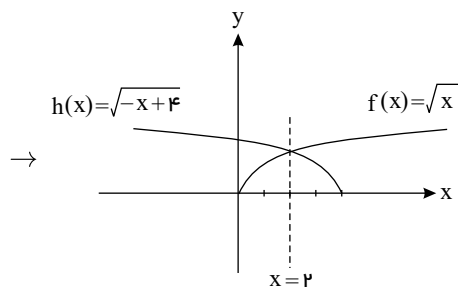
توان ۲ $\rightarrow x = x - 12 + 4 + 4\sqrt{x-12} \rightarrow 8 = 4\sqrt{x-12} \rightarrow 2 = \sqrt{x-12}$

توان ۲ $\rightarrow 4 = x - 12 \rightarrow x = 16 \rightarrow y = 4$

پس $A \begin{vmatrix} 16 \\ 4 \end{vmatrix}, O \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow AO = \sqrt{(16-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{16^2 + 4^2} = \sqrt{16^2 + 16} = \sqrt{16(16+1)} = 4\sqrt{17}$

۱ ۲ ۳ ۴ ۹۳

۴ واحد به سمت راست $f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ ها}} g(x) = \sqrt{-x} \xrightarrow{\text{۴ واحد به سمت راست}} h(x) = \sqrt{-(x-4)} = \sqrt{-x+4}$



بهرتر بود که صورت سؤال این گونه بود که قرینه تابع f نسبت به خط $x = a$ گردیده است. a را مشخص کنید.



۱ ۲ ۳ ۴ ۹۴

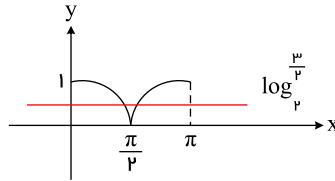
$$y = 2^{|\sin x|} \xrightarrow{\text{به راست } \frac{\pi}{2}} y = 2^{|\sin(x - \frac{\pi}{2})|} = 2^{|\cos x|} \xrightarrow{\text{به پایین } \frac{3}{2}} y = 2^{|\cos x|} - \frac{3}{2} \xrightarrow{y=0} 2^{|\cos x|} = \frac{3}{2} \Rightarrow \log_{\frac{3}{2}} = |\cos x|$$

در $\log_{\frac{3}{2}}$ در واقع عدد بین صفر تا یک است چرا که:

$$\underbrace{\log_{\frac{1}{2}}}_{\text{صفر}} < \log_{\frac{3}{2}} < \underbrace{\log_2}_{\text{یک}}$$

از طرفی تابع $|\cos x|$ را نیز رسم می‌کنیم.

در دو نقطه تقاطع دارند.



معکوس تابع را به دست می‌آوریم (قرینه نسبت به $y = x$) دقت کنید برد تابع $y \geq 2$ است پس دامنه تابع معکوس $x \geq 2$

خواهد بود یعنی فقط یک شاخه‌ای سهمی حاصل که ابتدا در حل سؤال تأثیری ندارد.

$$y = 2 + \sqrt{x-1} \Rightarrow y-2 = \sqrt{x-1} \Rightarrow x-1 = (y-2)^2 \Rightarrow x = (y-2)^2 + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = (x-2)^2 + 1$$

۲ واحد راست

$$\xrightarrow{\text{۳ واحد پایین}} g(x) = (x-4)^2 - 2 \Rightarrow g(4) = -2$$

۳ واحد پایین

۱ ۲ ۳ ۴ ۹۵

$$f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x+4}} \rightarrow D_f: x+4 > 0 \rightarrow x > -4$$

$$g(x) = \frac{x^2-25}{\sqrt{x+4}} \rightarrow D_g: x+4 > 0 \rightarrow x > -4$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = (x > -4) \cap (x > -4) - \{x | \frac{x^2-25}{\sqrt{x+4}} = 0\}$$

$$= x > -4 - \{x = \pm 5\} = (-4, +\infty) - \{5\}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۹۷

$$f \circ g(x) = 4x^2 - x - 1 \rightarrow f(g(x)) = 4x^2 - x - 1 \rightarrow f(2x+1) = 4x^2 - x - 1$$

$$\xrightarrow{x=0} f(1) = -1$$

$$g(x) = 2x+1 \rightarrow g(1) = 2(1)+1 = 3$$

$$\text{پس: } (f-g)(1) = f(1) - g(1) = -1 - 3 = -4$$

ابتدا باید دامنه $f+g$ را محاسبه کرده و برابر عدد ۱ قرار دهیم.

$$f(x) = \sqrt{n-3x} \rightarrow n-3x \geq 0 \rightarrow x \leq \frac{n}{3}$$

$$g(x) = \sqrt{x-3m} \rightarrow x-3m \geq 0 \rightarrow x \geq 3m$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{1\} \rightarrow$$



$$\frac{n}{3} = 3m = 1 \rightarrow \begin{cases} n = 3 \\ m = \frac{1}{3} \end{cases}$$

حال توابع f و g را مشخص می‌نماییم.

$$f(x) + g(x) = \sqrt{3-3x} + \sqrt{x-3\left(\frac{1}{3}\right)} = \sqrt{3-3x} + \sqrt{x-1}$$

$$\xrightarrow{x=1} f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0 \rightarrow a = 0$$

$$\text{پس: } am + n = 0 \times \frac{1}{3} + 3 = 3$$

با جمع کردن دو تابع $f+g$ و $f-g$ داریم: (۹۹) ۱ ۲ ۳ ۴

$$(f+g) + (f-g) = 2f = \{(3, 8), (4, 8), (5, 0)\}$$

پس $f = \{(3, 4), (4, 4), (5, 0)\}$ پس این طور به نظر می‌رسد که:

$$\frac{1}{f} = \left\{ \left(3, \frac{1}{4}\right), \left(4, \frac{1}{4}\right) \right\}$$

یعنی دامنه آن شامل دو عدد است ولی با دقت بیش‌تر می‌توان فهمید که چون دامنه‌های $f+g$ و $f-g$ اشتراک دامنه‌های f و g هستند، دامنه آن شامل اعداد دیگری هم می‌تواند باشد که با دامنه g مشترک نباشند. پس $\frac{1}{f}$ هم می‌تواند شامل زوج‌های بیش‌تری باشد. به طور کلی می‌توان گفت چون

دامنه f مشخص نیست، پس دامنه $\frac{1}{f}$ مشخص نیست.

(۱۰۰) ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{cases} D_f : x \geq -2 \\ D_g : x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow D_{f+g} = D_f \cap D_g = [-2, 2]$$

هم‌چنین $D_{f-g} = [-2, 2]$

از طرفی $(f-g)(x) = 0$ نتیجه می‌دهد: $f(x) = g(x)$ ، بنابراین $x = 0$ است. در نتیجه:

$$D_{\frac{f+g}{f-g}} = [-2, 2] - \{0\}$$

دامنه تابع مورد نظر شامل ۴ عدد صحیح است.

برای حل سؤال ابتدا $x = 2$ را در هر دو تابع جایگذاری می‌نماییم و سپس به صورت یک دستگاه $g(2)$ را محاسبه می‌کنیم: (۱۰۱) ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{aligned} (f+g)(x) = f(x) + g(x) &= 4x^2 + 1 \xrightarrow{x=2} \begin{cases} f(2) + g(2) = 17 \\ f(2) - g(2) = 5 \end{cases} \rightarrow 2g(2) = 12 \rightarrow g(2) = 6 \\ (f-g)(x) = f(x) - g(x) &= 2x + 1 \xrightarrow{x=2} \end{aligned}$$

(۱۰۲) ۱ ۲ ۳ ۴

$$D_f = (-3, 3), \quad D_g = [-1, 1]$$

با توجه به نمودار f و g داریم:

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}, \quad D_f \cap D_g = [-1, 1]$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1, \quad x \neq 0 \Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = [-1, 1] - ([-1, 1] - \{0\}) = \{0\}$$

دامنه تابع $\frac{f}{g}$ فقط شامل عدد صحیح $x = 0$ است.

(۱۰۳) ۱ ۲ ۳ ۴

$$f \text{ تابع بودن } \Rightarrow a + 1 = 4 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow \begin{matrix} \text{3} & \rightarrow & \text{4} \\ \text{4} & \rightarrow & \text{5} \\ \text{2} & \rightarrow & \text{8} \end{matrix} \Rightarrow f = \{(3, 4), (4, 5), (2, 8)\}$$



$$g = \{(x, 2x - 1) | x \in R_f\} = \{(4, 7), (5, 9), (8, 15)\} \Rightarrow D_f \cap D_g = \{4\}$$

$$(f + g)(4) = f(4) + g(4) = 5 + 7 = 12$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۴

$$\begin{cases} (f + g)(x) = 2x + 1 \\ (g - f)(x) = x - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(x) + g(x) = 2x + 1 \\ g(x) - f(x) = x - 2 \end{cases} \rightarrow 2g(x) = 3x - 1 \rightarrow g(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$f(x) + g(x) = 2x + 1 \rightarrow f(x) + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = 2x + 1 \rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

پس: $f(1) + g(3) = \frac{1}{2}(1) + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}(3) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 6$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۵

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1} \rightarrow x + 1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1 \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$g(x) = \frac{x - 2}{x - 3} \rightarrow x - 3 \neq 0 \rightarrow x \neq 3 \rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{3\}$$

$$g(x) = 0 \rightarrow x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{-1, 3\} - \{2\} \rightarrow D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{-1, 2, 3\}$$

با توجه به نمودار توابع f و g ، مقادیر تابع $g - f$ را به ازای اعداد صحیح $-1, 0, 1, 2, 3, 4$ پیدا می‌کنیم و از روش رد گزینه های نادرست استفاده می‌کنیم.

$$D_f \cap D_g = [-1, 4]$$

$$(g - f)(-1) = g(-1) - f(-1) = 2 - 0 = 2 \Rightarrow \text{گزینه ۱ نادرست}$$

$$(g - f)(0) = 1 - 1 = 0$$

$$(g - f)(1) = 0 - 2 = -2 \Rightarrow \text{گزینه ۲ نادرست}$$

$$(g - f)(3) = 2 - 2 = 0$$

$$(g - f)(4) = 3 - 2 = 1 \Rightarrow \text{گزینه ۳ نادرست}$$

پس گزینه های «۱» تا «۳» نادرست هستند.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۷ f تابعی یک به یک است یعنی:

$$\begin{cases} (2, 1) \in f \\ (m^2 - m, 1) \in f \end{cases} \Rightarrow m^2 - m = 2$$

$$\Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow (m - 2)(m + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ \text{یا} \\ m = -1 \end{cases}$$

$m = 2$ قابل قبول نیست، چون f یک به یک نمی‌شود:

$$f = \{(2, 1), (-1, 3), (1, 3)\}$$

ولی اگر $m = -1$ باشد، داریم:

$$f = \{(2, 1), (-1, 3), (-\frac{1}{2}, 0)\}$$

ما حاصل $(f + g)(-1)$ را می‌خواهیم:



$$(f+g)(-1) = f(-1) + g(-1) = 3 + \left[-\frac{3}{2} + 1\right] = 3 + \left[-\frac{1}{2}\right] = 3 - 1 = 2$$

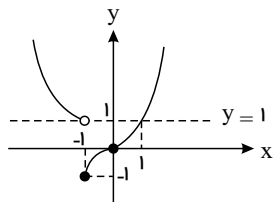
ضابطه تابع $f(x)$ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & -1 \leq x < 0 \\ x & x < -1 \end{cases}$$

$$(f \cdot g)(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & -1 \leq x < 0 \\ x^2 & x < -1 \end{cases}$$

حال تابع $(f \cdot g)(x)$ را به دست می‌آوریم:

نمودار تابع $(f \cdot g)(x)$ به شکل مقابل است:



که تنها به ازای $x = 1$ داریم: $(f \cdot g)(x) = 1$

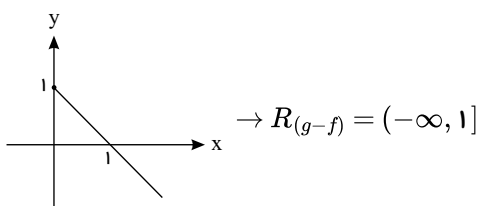
۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۹

$$f(x) = x + \sqrt{x} \rightarrow x \geq 0 \rightarrow D_f = [0, +\infty)$$

$$g(x) = 1 + \sqrt{x} \rightarrow x \geq 0 \rightarrow D_g = [0, +\infty)$$

$$\rightarrow D_{(g-f)} = D_g \cap D_f = [0, +\infty)$$

$$(g-f)(x) = 1 + \sqrt{x} - (x + \sqrt{x}) \rightarrow (g-f)(x) = 1 - x$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱۰

$$f = \left\{(-1, 4), (2, 0), \left(-3, \frac{3}{2}\right)\right\} \quad D_f = \{-1, 2, -3\}$$

$$g = \left\{\left(0, \frac{3}{2}\right), (2, -1), (-1, 1)\right\} \quad D_g = \{0, 2, -1\}$$

$$D_f \cap D_g = \{2, -1\}$$

$$\left(\frac{1}{2}f - 3g^2\right)(-1) = \frac{1}{2}f(-1) - 3g^2(-1) = \frac{1}{2} \times 4 - 3(1)^2 = 2 - 3 = -1$$



$$\left(\frac{1}{2}f - 3g^2\right)(2) = \frac{1}{2}f(2) - 3g^2(2) = \frac{1}{2} \times 0 - 3(-1)^2 = 0 - 3 = -3$$

$$\frac{1}{2}f - 3g^2 = \{(-1, -1), (2, -3)\} \Rightarrow -1 - 1 + 2 - 3 = -3$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱۱

$$D_f = \{-2, -1, 0\}, D_g = \{2a, 0, -3\} \Rightarrow D_{f-g} = D_f \cap D_g = \{0, -1\}$$

باتوجه به رابطه بالا می توان نتیجه گرفت که $2a$ باید -1 باشد. پس داریم:

$$2a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow g = \{(-1, 3), (0, 1), (-3, 4)\}, f = \{(-2, 3), (-1, -1), (0, 4)\}$$

$$(2f + g)(0) = 2f(0) + g(0) = 2 \times 4 + 1 = 9$$

$$(2f + g)(-1) = 2f(-1) + g(-1) = 2(-1) + 3 = 1$$

$$2f + g = \{(0, 9), (-1, 1)\} \Rightarrow 2f + g \text{ برد} = \{9, 1\} \Rightarrow 9 \times 1 = 9 \Rightarrow \frac{9}{a} = \frac{9}{-\frac{1}{2}} = -18$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱۲

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

دامنه توابع لگاریتمی به این صورت است که جلوی لگاریتم باید مثبت باشد و چون y_1 و y_2 خطوطی با شیب منفی هستند می توان دامنه f و g را به شکل $(-\infty, a_1)$ و $(-\infty, a_2)$ در نظر گرفت که اشتراک آن ها به صورت $(-\infty, a)$ خواهد شد.

دقت کنید عملیات روی مؤلفه ی دوم تابع انجام می شود. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱۳

$$f = \{(0, -1), (1, 0), (4, 1), (2, 5)\} \rightarrow f - 1 = \{(0, -2), (1, -1), (4, 0), (2, 4)\}$$

دامنه ی مشترک $f - 1$ ، f را پیدا کرده و تقسیم را روی مؤلفه ی دوم آن ها انجام می دهیم. در نتیجه داریم:

$$\frac{f}{f-1} = \{(0, \frac{1}{-2}), (1, \frac{0}{-1}), (2, \frac{5}{4})\} \rightarrow \text{شامل ۳ زوج مرتب است}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱۴

$$f(x) = \frac{x-3}{x-4} \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$g(x) = \sqrt{x-3} \rightarrow D_g : x-3 \geq 0 \rightarrow x \geq 3$$

$$D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f - \{x | f(x) = 0\} = x \geq 3 \cap \mathbb{R} - \{4\} - \{3\} = x > 3 - \{4\}$$

پس دامنه ی $\frac{g}{f}$ اعداد طبیعی ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را شامل نمی شود.

ابتدا تابع بودن f را بررسی می کنیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱۵

$$(1, m) = (1, m^2 - 12) \Rightarrow m^2 - 12 = m \Rightarrow m^2 - m - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 4 \\ m_2 = -3 \end{cases}$$

اگر $m = 4$ آن گاه دو زوج مرتب با مؤلفه اول ۴ و مؤلفه دوم متفاوت خواهیم داشت و f تابع نخواهد بود، پس فقط $m = -3$ پذیرفته است. حال در

تابع $f = \{(1, -3), (-3, 2), (4, 1)\}$ تنها دو عضو در دامنه $g(x) = \sqrt{x}$ صدق می کنند. پس دامنه تابع $(\frac{f}{g})(x)$ شامل ۲ عضو است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱۶ می دانیم $D_{f-g} = D_f \cap D_g$ و چون $D_{f-g} = \{1, 3\}$ پس ۱ و ۳ حتماً در دامنه g هستند.



$$(1, -4) \in f - g \rightarrow (f - g)(1) = -4 \rightarrow f(1) - g(1) = -4 \rightarrow 4 - g(1) = -4 \rightarrow g(1) = 8$$

$$(3, 1) \in f - g \rightarrow (f - g)(3) = 1 \rightarrow f(3) - g(3) = 1 \rightarrow 4 - g(3) = 1 \rightarrow g(3) = 3$$

$$\text{پس: } \begin{cases} (1, 8) \in g \rightarrow \frac{1}{g(x) - 8} : (1, \frac{1}{8-8}) \text{ غیر قابل قبول} \\ (3, 3) \in g \rightarrow \frac{1}{g(x) - 8} : (3, \frac{1}{3-8}) = (3, -\frac{1}{5}) \end{cases}$$

۱۱۷) معادله خط گذرنده از دو نقطه $(-2, 0)$ و $(0, 2)$ را می‌یابیم و آن را برابر با عبارت $x + f(x - 1)$ قرار می‌دهیم.

$$\frac{y}{x+2} = \frac{0-2}{-2-0} = 1 \Rightarrow y = x+2 \Rightarrow x + f(x-1) = x+2$$

$$\Rightarrow f(x-1) = 2 \xrightarrow{x \rightarrow x+1} f(x) = 2$$

همچنین معادله خط گذرنده از دو نقطه $(0, 6)$ و $(6, 0)$ را یافته و برابر با عبارت $2x + g(x)$ قرار می‌دهیم.

$$\frac{y-6}{x} = \frac{0-6}{6-0} = -1 \Rightarrow y-6 = -x \Rightarrow y = -x+6 \Rightarrow 2x + g(x) = -x+6 \Rightarrow g(x) = -3x+6$$

$$\text{پس: } y = f(x) + g(x) = 2 + 6 - 3x = 8 - 3x \Rightarrow y = -3x + 8$$

که نمودارش در گزینه اول آمده است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱۸

$$h = \frac{f}{g} \Rightarrow D_h = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1 \Rightarrow D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$g(x) = \sqrt{2 - 2x^2} \Rightarrow 2 - 2x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_g = [-1, 1]$$

$$D_f \cap D_g = \{-1, 1\}, g(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{2 - 2x^2} = 0 \Rightarrow 2 - 2x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow D_h = \{-1, 1\} - \{-1, 1\} = \emptyset$$

دامنه تابع h برابر تهی است. یعنی تابع h تعریف نمی‌شود.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱۹

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & , -2 \leq x \leq 0 \\ 2 & , 0 < x \end{cases}, g(x) = -x, x \leq 0$$

$(g(x))$ یک تابع خطی است که از مبدأ می‌گذرد و بر خط $y = x + 2$ عمود است، یعنی شیبش -1 است.

$$\text{دامنه: } D_{f+2g} = D_f \cap D_g = [-2, +\infty) \cap (-\infty, 0] \rightarrow D_{f+2g} = [-2, 0]$$

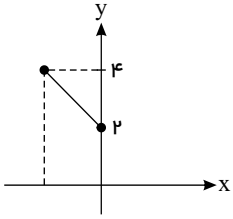
برای محاسبه برد داریم:

$$(f + 2g)(x) = (x + 2) + 2(-x) = x + 2 - 2x \Rightarrow (f + 2g)(x) = -x + 2$$

اکنون برد تابع را به ازای ابتدا و انتهای دامنه محاسبه می‌کنیم:

$$(f + 2g)(-2) = 4, (f + 2g)(0) = 2 \rightarrow R_{f+2g} = [2, 4]$$

و شکل آن بدین صورت است:



۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲۰

$$D_f: 1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1, D_g = \{-3, -1, 0\}$$

کاملاً مشخص است که دامنه‌ی $(g - f) \cdot 2g$ برابر است با: $D_f \cap D_g = \{-1, 0\}$ یعنی

$$\left. \begin{aligned} ((g - f) \cdot 2g)(-1) &= (g(-1) - f(-1)) \cdot 2g(-1) = (4 - 0) \times 2(4) = 32 \\ ((g - f) \cdot 2g)(0) &= (g(0) - f(0)) \cdot 2g(0) = (7 - 1) \times 2(7) = 84 \end{aligned} \right\}$$

$\Rightarrow (g - f) \cdot 2g = \{(-1, 32), (0, 84)\} \Rightarrow$ بیش‌ترین مقدار تابع برابر ۸۴ است.

ریشه‌های تابع $f \cdot g$ برابر با ۳- و ۱ هستند، پس ضابطه آن به صورت $y = k(x - 1)(x + 3)$ است. این تابع از نقطه

(۰, ۶) می‌گذرد، پس:

$$6 = k(-1)(3) \Rightarrow k = -2$$

پس ضابطه $f \cdot g$ به صورت $(f \cdot g)(x) = -2(x - 1)(x + 3)$ است.

از طرفی تابع f یک تابع خطی است که از نقطه $(0, 1)$ می‌گذرد. ریشه f با یکی از ریشه‌های $f \cdot g$ برابر است. چون ریشه f عددی مثبت است، پس عدد ۱ ریشه f است. بنابراین f از نقطه $(1, 0)$ نیز می‌گذرد. معادله f را می‌نویسیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \mid \frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \rightarrow \frac{y - 1}{x} = \frac{1}{-1} \rightarrow y = -x + 1 \rightarrow f(x) = -x + 1 \\ B \mid \end{array} \right.$$

با داشتن ضابطه f و $f \cdot g$ ، ضابطه g را به دست می‌آوریم:

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) \Rightarrow -2(x - 1)(x + 3) = -(x - 1) \times g \Rightarrow g = 2(x + 3) = 2x + 6$$

ضابطه $f + g$ برابر است با:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = -x + 1 + 2x + 6 = x + 7$$

نمودار $f + g$ در گزینه «۱» آمده است.

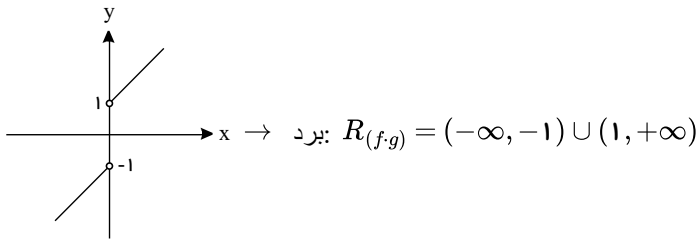
۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲۲

$$f(x) = x^2 + |x| \rightarrow D_f = \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{x} \rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap (\mathbb{R} - \{0\}) = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\rightarrow (f \cdot g)(x) = \frac{x^2 + |x|}{x}, D_{f \cdot g} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\rightarrow (f \cdot g)(x) = x + \frac{|x|}{x} = \begin{cases} x + 1 & ; x > 0 \\ x - 1 & ; x < 0 \end{cases}$$



برد تابع $(f \cdot g)(x)$ شامل ۳ عدد صحیح $\{1, 0, -1\}$ نمی باشد.

برای حل سوال ابتدا باید دامنه هر دو ضابطه را تعیین نماییم و بین آن‌ها اشتراک بگیریم:

$$f(x) = \sqrt{x+3} \rightarrow x+3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3$$

$$g(x) = \sqrt{a-x} \rightarrow a-x \geq 0 \rightarrow x \leq a$$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = [-3, a] = [-3, 10] \rightarrow \boxed{a=10}$$

حال برای محاسبه پارامتر b باید تابع $f+g$ را بسازیم:

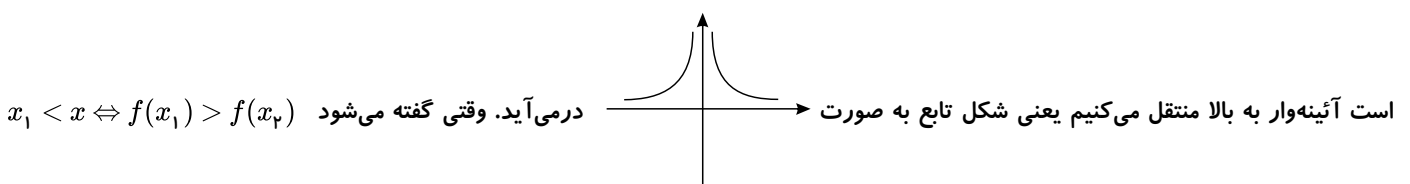
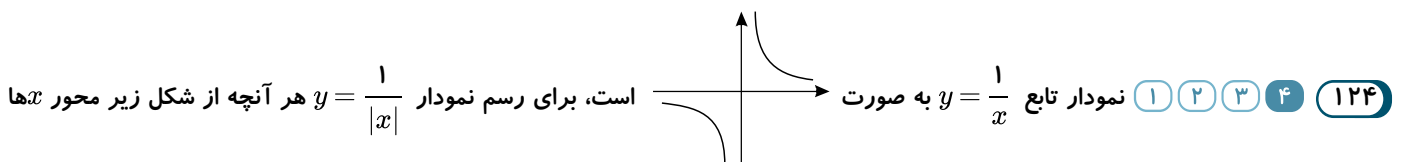
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x+3} + \sqrt{a-x} + 2b$$

$$(f+g)(6) = f(6) + g(6) = \sqrt{6+3} + \sqrt{10-6} + 2b$$

$$3 + 2 + 2b = 6 \rightarrow 2b = 1 \rightarrow \boxed{b = \frac{1}{2}}$$

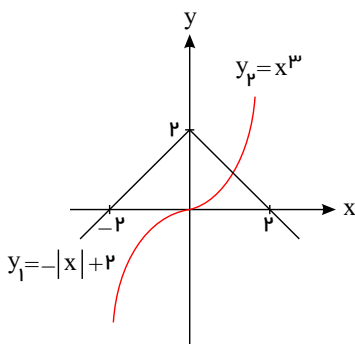
پس جواب نهائی برابر است با:

$$a+b = 10 + \frac{1}{2} = \frac{21}{2}$$



یعنی بازه ای که در آن، تابع اکیداً نزولی است و با توجه به گزینه ها و نمودار، گزینه ی چهارم صحیح است.

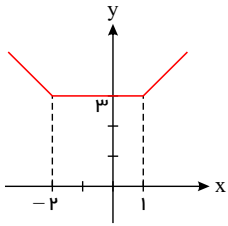
نمودارهای توابع $y_1 = -|x| + 2$ و $y_2 = x^3$ را رسم می کنیم:



با توجه به نمودارهای رسم شده، دو نمودار یکدیگر را در یک نقطه با طول مثبت قطع می کنند. بنابراین معادله مورد نظر فقط یک ریشه مثبت دارد.



۱۲۶ تابع داده شده یک تابع گلدانی است که در $x = -2$ و $x = 1$ (ریشه های داخل قدرمطلق) دارای شکست است. ۱ ۲ ۳ ۴

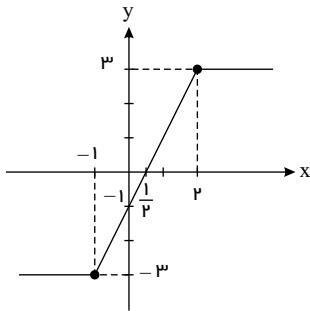


اکیداً نزولی: $x < -2 \rightarrow$

۱۲۷ نمودار این تابع از انتقال های افقی و عمودی نمودار تابع $y = x^3$ به دست آمده است. اگر نمودار $y = x^3$ را یک واحد به سمت راست (در راستای محور x ها) و سپس دو واحد به سمت بالا (در راستای محور y ها) انتقال دهیم ضابطه $y = (x - 1)^3 + 2$ به دست می آید که همان ضابطه مربوط به نمودار داده شده در صورت سؤال است. پس: ۱ ۲ ۳ ۴

$$a = 1, b = 2 \Rightarrow a \cdot b = 2$$

۱۲۸ تابع داده شده یک تابع سرسره ای (آبشاری) است که در $x = -1$ و $x = 2$ (ریشه های داخل قدرمطلق) دارای شکست است. ۱ ۲ ۳ ۴



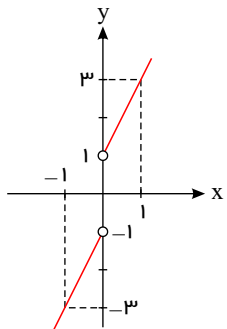
اکیداً صعودی: $-1 < x < 2 \rightarrow$

۱۲۹ ابتدا به صورت مشروط قدر مطلق را از بین می بریم: ۱ ۲ ۳ ۴

$$x > 0 \rightarrow y = 2x + \frac{x}{x} \rightarrow y = 2x + 1$$

$$x < 0 \rightarrow y = 2x + \frac{-x}{x} \rightarrow y = 2x - 1$$

اکنون دو خط داده شده را با توجه به شرط رسم می کنیم.

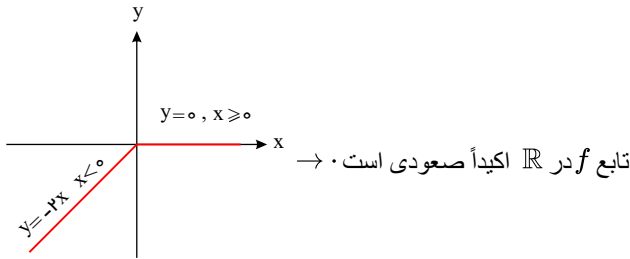


تابع اکیداً صعودی است $\rightarrow$

۱۳۰ شکل تابع داده شده را رسم می کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴

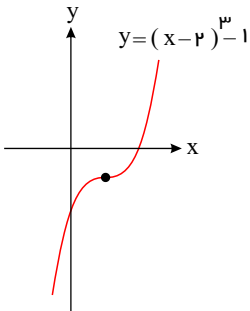
$$x \geq 0 \rightarrow y = x - x \rightarrow y = 0$$

$$x < 0 \rightarrow y = x + x \rightarrow y = 2x \xrightarrow{\text{برای رسم}} \begin{cases} 0 \\ -1 \\ -2 \end{cases}, \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$$



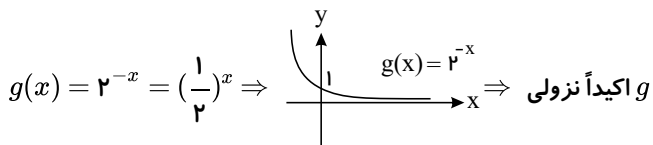
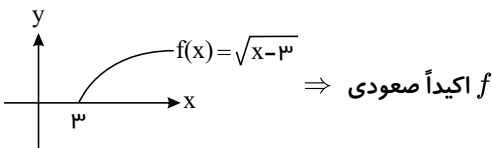
۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳۱

ضابطه تابع را به صورت $y = (x - 2)^3 - 1$ می‌نویسیم و برای رسم آن، نمودار تابع $y = x^3$ را ۲ واحد به راست و یک واحد به پایین می‌بریم:



همان‌طور که می‌بینید نمودار تابع از ناحیه دوم عبور نمی‌کند.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳۲



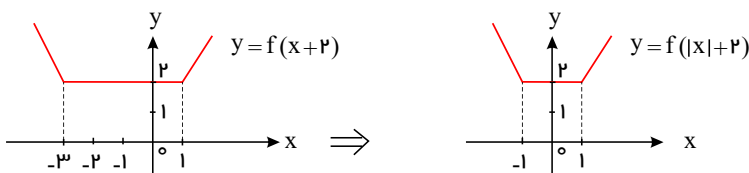
چون f اکیداً صعودی است، پس $-f$ اکیداً نزولی است و می‌دانیم مجموع دو تابع اکیداً نزولی تابعی اکیداً نزولی است. پس تابع $g + (-f) = g - f$ اکیداً نزولی است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳۳

$$y = f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x+2} y = f(x+2) \xrightarrow{x \rightarrow |x|} y = f(|x|+2)$$

۲ واحد به چپ

در نمودار $y = f(x+2)$ سمت چپ محور y ها را حذف کرده و قرینه سمت راست محور y ها را نسبت به محور y ها یافته و به شکل اضافه می‌کنیم تا نمودار $y = f(|x|+2)$ حاصل شود.



بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $y = f(|x|+2)$ در آن بازه صعودی است بازه $[-1, +\infty)$ است.

ابتدا x ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳۴

$$f = \{(-2, 1 \circ - x), (0, x^2 + 4), (1, 2x + 7)\}$$

$$1 \circ -x \leq x^2 + 4 \rightarrow x^2 + x - 6 \geq 0 \rightarrow (x + 3)(x - 2) \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$$

$$x^2 + 4 \leq 2x + 7 \rightarrow x^2 - 2x - 3 \leq 0 \rightarrow (x - 3)(x + 1) \leq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$$

$$x \leq -3 \text{ یا } x \geq 2 \quad (I)$$

$$-1 \leq x \leq 3 \quad (II)$$

از اشتراک I و II به جواب $2 \leq x \leq 3$ می‌رسیم.

با مرتب کردن اعضای دامنهٔ تابع داریم:

x	-6	0	2	6	7
y	2	4	$m^2 - 3$	7	9

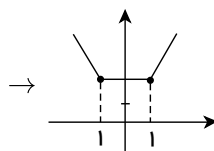
$$m^{\mathfrak{r}} - \mathfrak{r} < \mathfrak{r} \Rightarrow m^{\mathfrak{r}} < \mathbf{v} \Rightarrow -\sqrt{\mathbf{v}} < m < \sqrt{\mathbf{v}} \quad (1)$$

$$m^r - \mathfrak{V} > \mathfrak{V} \Rightarrow m^r > 1_0 \Rightarrow m < -\sqrt{1_0} \text{ и } m > \sqrt{1_0} \quad (2)$$

مجموعه جواب : $(1) \cup (2) \Rightarrow (-\infty, -\sqrt{10}) \cup (-\sqrt{7}, \sqrt{7}) \cup (\sqrt{10}, +\infty)$

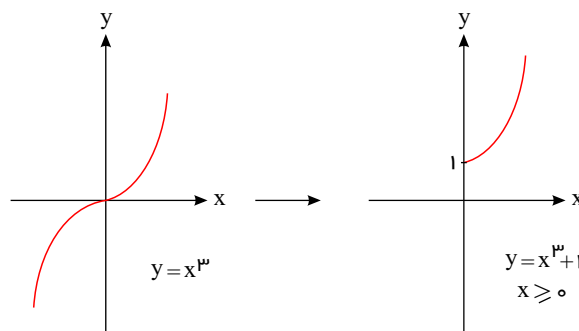
۱۳۶ ۱ ۲ ۳ ۴ تابع داده شده، یک تابع گلدانی است آن را رسم می‌کنیم.

$$\begin{array}{ll} x < -1: & y = -x - 1 - x + 1 \rightarrow y = -2x \\ -1 \leq x \leq 1: & y = x + 1 - x + 1 \rightarrow y = 2 \\ x > 1: & y = x + 1 + x - 1 \rightarrow y = 2x \end{array}$$

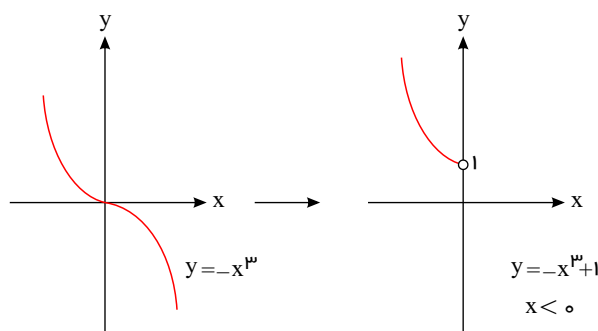


۱۳۷ ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا به صورت مشروط، قدر مطلق را از بین می‌بریم.

$$x \geq \circ \rightarrow y = x^{\mathfrak{r}}(x) + 1 \rightarrow y = x^{\mathfrak{r}} + 1$$



$$x < \circ \rightarrow y = x^{\mathfrak{r}}(-x) + 1 \rightarrow y = -x^{\mathfrak{r}} + 1$$



۱۳۸ ۱ ۲ ۳ ۴ در تابع نزولی به ازای هر x_1 و x_2 متعلق به دامنه اگر $x_1 < x_2$ باشد آن گاه $f(x_1) \geq f(x_2)$ است. برای تعیین دامنه

تعریف توابع رادیکالی با فرجه زوج کافی است زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار دهیم.

$$f(2) - f(|x-1|) \geq 0 \rightarrow f(2) \geq f(|x-1|) \xrightarrow{f \text{ نزولی است}} 2 \leq |x-1|$$

$$\rightarrow \begin{cases} x-1 \geq 2 \rightarrow x \geq 3 \\ \text{یا} \\ x-1 \leq -2 \rightarrow x \leq -1 \end{cases} \rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$$

۱۳۹ اگر f تابعی اکیداً صعودی باشد، داریم: ۱ ۲ ۳ ۴

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \Rightarrow (f \circ f)(x_1) < (f \circ f)(x_2)$$

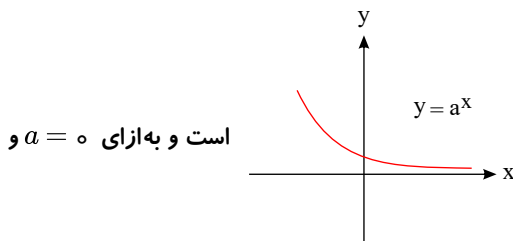
تابع $f \circ f$ اکیداً صعودی است.

اگر f تابعی اکیداً نزولی باشد، داریم:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \Rightarrow (f \circ f)(x_1) < (f \circ f)(x_2)$$

تابع $f \circ f$ اکیداً صعودی است.

بنابراین اگر تابع f اکیداً یکنوا باشد آن گاه تابع $f \circ f$ در هر صورت اکیداً صعودی است. در بین گزینه ها فقط گزینه (۳) اکیداً نزولی است و نمی تواند $f \circ f$ باشد. (گزینه سوم خطی است با شیب منفی)



است و به ازای $a = 0$

۱۴۰ تابع $y = a^x$ به ازای $0 < a < 1$ اکیداً نزولی است و به صورت ۱ ۲ ۳ ۴

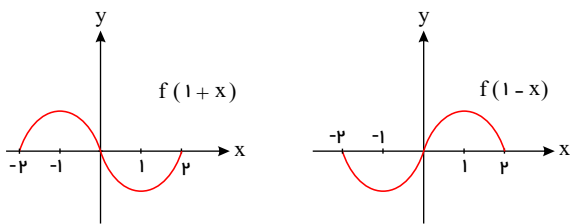
$a = 1$ تابع ثابت و در نتیجه هم صعودی و هم نزولی است پس برای آنکه تابع داده شده نزولی باشد باید:

$$0 \leq \frac{3m+1}{4} \leq 1 \rightarrow 0 \leq 3m+1 \leq 4 \rightarrow -1 \leq 3m \leq 3 \rightarrow \frac{-1}{3} \leq m \leq 1$$

که در این بازه، اعداد صحیح صفر و یک قرار دارند.

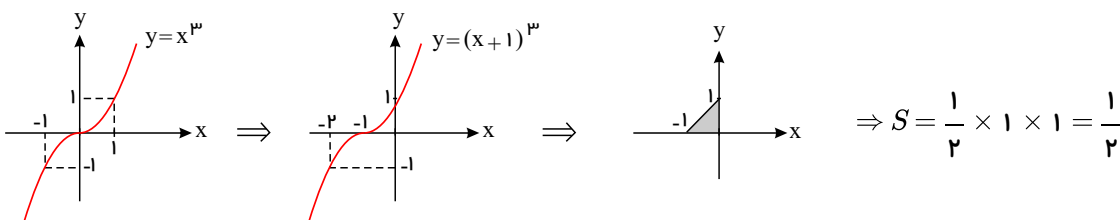
۱۴۱ ۱ ۲ ۳ ۴

نمودار تابع $y = f(1-x)$ را با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ رسم می کنیم:



برای رسم نمودار $f(1-x)$ ، نمودار $f(x)$ را یک واحد به سمت چپ می بریم و برای رسم نمودار $f(1-x)$ ، نمودار تابع $f(1+x)$ را نسبت به محور y ها قرینه می کنیم. مطابق شکل نمودار حاصل در فاصله های $[-2, -1]$ و $[1, 2]$ اکیداً نزولی است.

۱۴۲ نمودار $y = x^3$ را یک واحد به چپ منتقل می کنیم تا نمودار $y = (x+1)^3$ حاصل شود. ۱ ۲ ۳ ۴





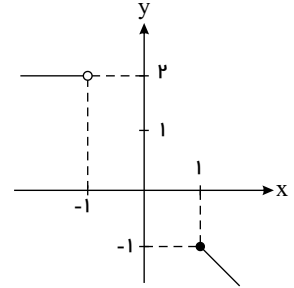
۱۴۳ اگر f تابعی اکیداً نزولی و $f(a) \leq f(b)$ آن گاه $a \geq b$ ۱ ۲ ۳ ۴

$$y = \sqrt{f(|x|) - f(2)} \Rightarrow f(|x|) - f(2) \geq 0 \Rightarrow f(|x|) \geq f(2) \xrightarrow{f \text{ اکیداً نزولی}} |x| \leq 2$$

$$\Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow \text{دامنه} = [-2, 2]$$

۱۴۴ ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴

$$f(x) = \begin{cases} 2 & ; x < -1 \\ k & ; -1 \leq x < 1 \\ -x & ; x \geq 1 \end{cases}$$



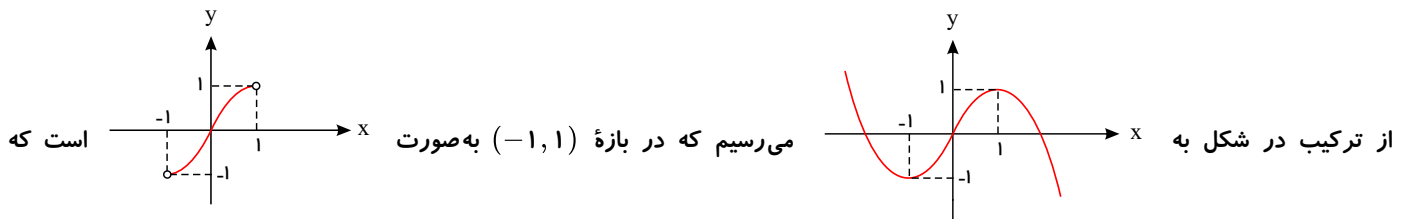
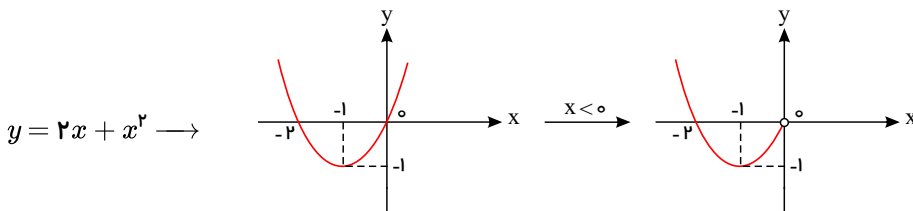
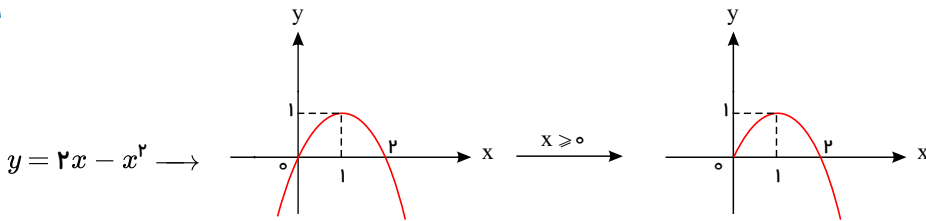
با توجه به نمودار بالا برای این که تابع f نزولی باشد، باید داشته باشیم: $-1 \leq k \leq 2$

۴ مقدار $k = -1, 0, 1, 2$ اعداد صحیح

۱۴۵ ابتدا با گذاشتن شرط، قدرمطلق را از بین می‌بریم: ۱ ۲ ۳ ۴

$$x \geq 0 \rightarrow y = 2x - x^2 \rightarrow S \left| \begin{array}{c} \frac{-b}{2a} \\ \frac{4ac-b^2}{4a} \end{array} \right| \rightarrow S \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right|$$

$$x < 0 \rightarrow y = 2x + x^2 \rightarrow S \left| \begin{array}{c} \frac{-b}{2a} \\ \frac{4ac-b^2}{4a} \end{array} \right| \rightarrow S \left| \begin{array}{c} -1 \\ -1 \end{array} \right|$$



می‌رسیم که در بازه $(-1, 1)$ به صورت

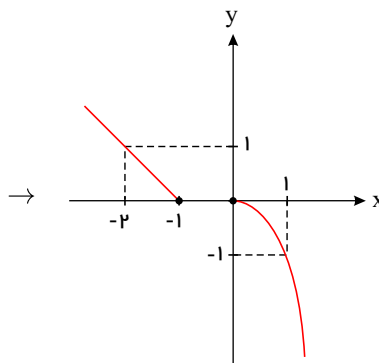
است که

از ترکیب در شکل به

صعودی است.

۱۴۶ نمودار تابع f را رسم می‌کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴

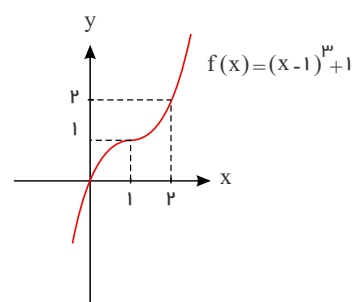
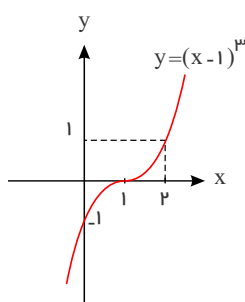
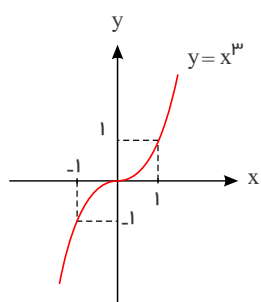
$$f(x) = \begin{cases} |x+1| & ; x \leq -1 \Rightarrow y = |x+1| = -x-1 \\ -x^2 & ; x \geq 0 \end{cases} \rightarrow$$



با توجه به نمودار واضح است که تابع f نزولی است ولی چون $f(-1) = f(0) = 0$ ، تابع اکیداً نزولی نمی‌باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴۷

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1 = (x-1)^3 + 1$$



تابع f در کل $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

نمودار تابع $g(x) = ax^3 + bx^2 + c$ از نقطه $(0, 0)$ می‌گذرد: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴۸

$$g(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

چون $x = 0$ تنها ریشه معادله $g(x) = 0$ است، بنابراین داریم:

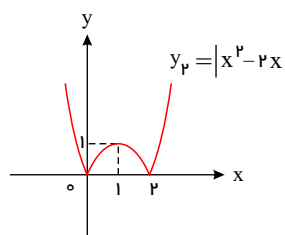
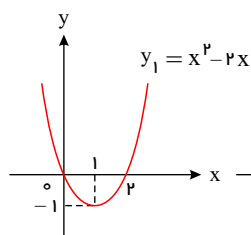
$$g(x) = x^2(ax+b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

مقدار b باید صفر باشد تا $x = 0$ تنها ریشه معادله $g(x) = 0$ شود. از طرفی داریم:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{4} = a\left(\frac{1}{8}\right) \Rightarrow a = 2 \Rightarrow a + b + c = 2 + 0 + 0 = 2$$

می‌دانیم $|ab| = |a||b|$ است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴۹

$$f(x) = |x||x-2| = |x^2 - 2x| \rightarrow$$



تابع در بازه $(1, 2)$ نزولی است.

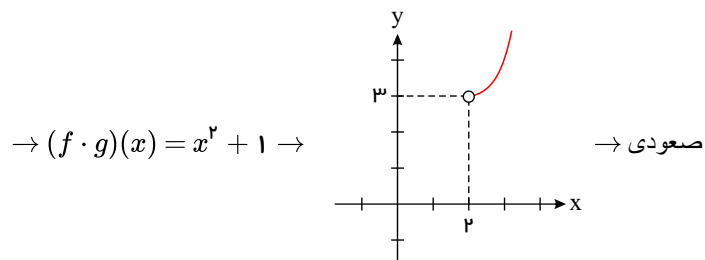
۱۵۰ ابتدا دامنه تعریف دو تابع f و g را به دست می آوریم:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x - 2}} \rightarrow D_f : x - 2 > 0 \rightarrow x > 2$$

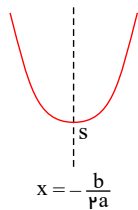
$$g(x) = \frac{\sqrt{x - 2}}{x^2 - 1} \rightarrow D_g : \begin{cases} x - 2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2 \\ x^2 - 1 \neq 0 \rightarrow x \neq \pm 1 \end{cases} \rightarrow x \geq 2$$

بنابراین $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = (2, +\infty)$ است.

$$y = (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x - 2}} \times \frac{\sqrt{x - 2}}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{x^2 - 1}$$



است که در بازه $[\frac{-b}{2a}, +\infty)$ صعودی است

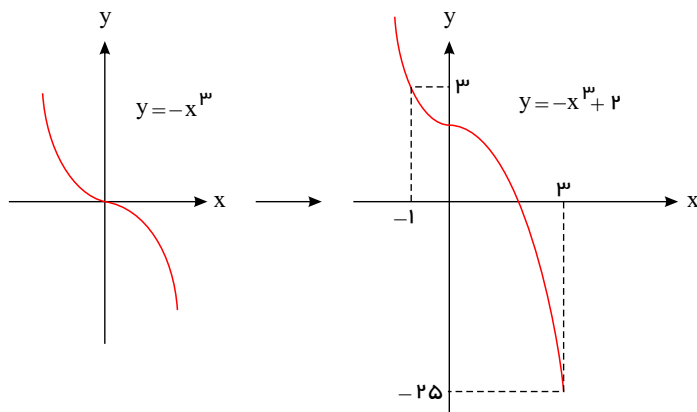


۱۵۱ تابع $y = ax^2 + bx + c$ با شرط $a > 0$ به صورت

پس $x = -2$ می تواند طول رأس سهمی و یا بزرگتر از طول رأس سهمی باشد.

$$-2 \geq \frac{-b}{2a} \rightarrow -2 \geq \frac{-k}{6} \rightarrow k \geq 12$$

۱۵۲ با رسم تابع داده شده و تعیین نقاط ابتدائی و انتهائی بازه داده شده، برد تابع مشخص می شود.



پس برد تابع به صورت $[-2.5, 3]$ است و $b - a = 28$ می باشد.

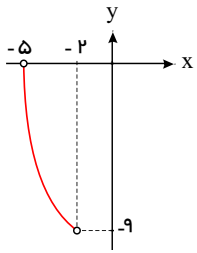
۱۵۳

$$\left| x + \frac{7}{2} \right| < \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} < x + \frac{7}{2} < \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} - \frac{7}{2} < x < \frac{3}{2} - \frac{7}{2} \Rightarrow -5 < x < -2$$

نمودار تابع $f(x) = x^2 + 4x - 5$ را در بازه $(-5, -2)$ رسم می کنیم، توجه کنید که رأس این سهمی



$$S \text{ است و محور طول ها را در } x = 1 \text{ و } x = -5 \text{ قطع می کند.} \quad \begin{cases} -\frac{b}{2a} = -2 \\ \frac{4ac-b^2}{4} = -9 \end{cases}$$

تابع در بازه $(-5, -2)$ نزولی است.۱۵۴ اگر x_1 و x_2 در بازه $[1, 2]$ باشند، داریم:

$$x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

اما مقادیر $f(x_1)$ و $f(x_2)$ بین صفر و ۱ قرار دارند و f در فاصله صفر تا ۱ نزولی است. پس:

$$f(f(x_1)) > f(f(x_2)) \longrightarrow \text{یعنی } f(f(x)) \text{ نزولی است.}$$

۱۵۵ با مرتب کردن اعضای دامنه تابع داریم:

$$f: \{(-2, a), (-1, a-1), (0, a^3-1)\}$$

$$f \text{ اکیداً نزولی} \quad -2 < -1 < 0 \longrightarrow f(-2) > f(-1) > f(0) \Rightarrow a > a-1 > a^3-1$$

$$a > a-1 \Rightarrow 0 > -1 \Rightarrow \text{برقرار است} \Rightarrow a \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$a^3-1 < a-1 \Rightarrow a^3-a < 0 \Rightarrow a(a^2-1) < 0$$

$$\begin{array}{c|ccccccccc} a & -\infty & & -1 & & 0 & & 1 & & +\infty \\ \hline a(a^2-1) & & - & & 0 & + & & 0 & - & & + \end{array} \Rightarrow a < -1 \text{ یا } 0 < a < 1 \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow a < -1 \text{ یا } 0 < a < 1 \Rightarrow a \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$$

۱۵۶ تابع نمایی $f(x) = a^x$ با شرط $a > 1$ تابعی اکیداً صعودی است. پس داریم:

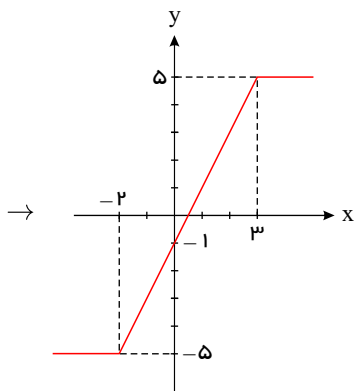
$$y = \left(\frac{5-k}{1-3k}\right)^x \Rightarrow \frac{5-k}{1-3k} > 1 \Rightarrow \frac{5-k}{1-3k} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{5-k-1+3k}{1-3k} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{2k+4}{1-3k} > 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccccccccc} k & -\infty & & -2 & & -\frac{1}{3} & & +\infty \\ \hline \frac{2k+4}{1-3k} & & - & & 0 & + & & \infty & - \end{array} \Rightarrow -2 < k < -\frac{1}{3}$$

۱۵۷ توابع به شکل $(a \neq b)y = |x-a| - |x-b|$ را توابع آبشاری می نامند که اگر $a > b$ باشد به شکل واگر $a < b$ باشد به شکل هستند.



$$f(x) = |x+2| - |x-3| \rightarrow \begin{cases} x+2=0 \rightarrow x=-2 \rightarrow y=-5 \\ x-3=0 \rightarrow x=3 \rightarrow y=5 \end{cases}$$



با توجه به نمودار، تابع در فاصله $(-2, 3)$ اکیداً صعودی است.

۱۵۸ ۱ ۲ ۳ ۴ چون تابع پیوسته و نزولی اکید و $f(0) = 0$ است پس حتماً به ازای $x > 1$ ، $f(x) < 0$ است و به ازای $x < 1$ ، $f(x) > 0$ است. برای پیدا کردن دامنه‌ی تعریف تابع $\sqrt{xf(x)}$ کافی است زیرا رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهیم.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	$+$	0	$-$
$xf(x) \geq 0$	$-$	0	$+$	$-$

$\rightarrow x \in [0, 1]$

۱۵۹ ۱ ۲ ۳ ۴ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

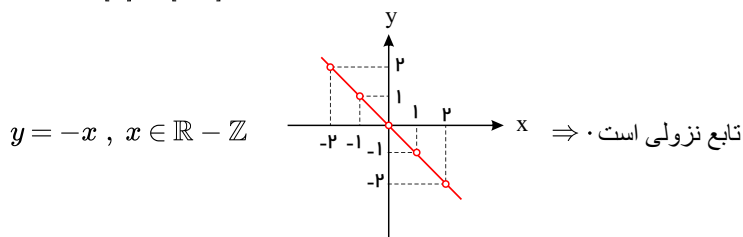
گزینه ۱ $y = x + |x| = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow$ تابع صعودی است.

گزینه ۲ $y = x - [x] \Rightarrow$ $\Rightarrow$ تابع غیر یکنوا است.

گزینه ۳ $y = |x| + |x-1| \Rightarrow$ $\Rightarrow$ تابع غیر یکنوا است.

گزینه ۴ توجه کنید که $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ است.

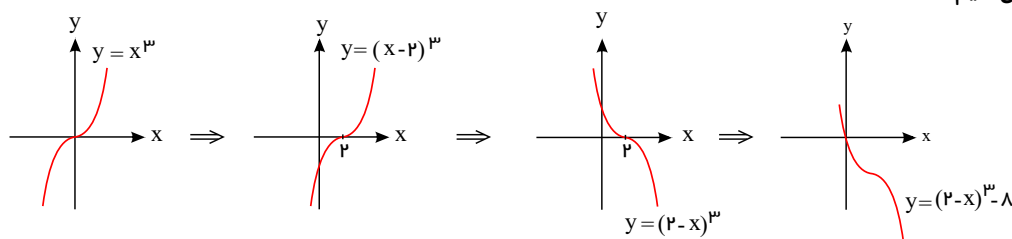
$$y = x \left(\frac{1}{[x] + [-x]} \right) \Rightarrow [x] + [-x] \neq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \Rightarrow y = x \left(\frac{1}{-1} \right) = -x$$



۱۶۰ عدد ۸ را اضافه و کم می کنیم: ۱ ۲ ۳ ۴

$$f(x) = \underbrace{6x^2 - x^3 - 12x + 8}_{(2-x)^3} - 8 = (2-x)^3 - 8$$

حالا مرحله به مرحله نمودار تابع را رسم می کنیم:



۱۶۱ در توابع اکیداً صعودی داریم: ۱ ۲ ۳ ۴

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

$$2 > 1 \Rightarrow f(2) > f(1) \Rightarrow m - 4 > m^2 - 4m \Rightarrow m^2 - 5m + 4 < 0 \Rightarrow (m-1)(m-4) < 0 \Rightarrow m \in (1, 4)$$

چون m عددی طبیعی است، مقادیر طبیعی $m = 2, 3$ در بازه مورد نظر قرار دارد:

$$m \in \mathbb{N} \rightarrow m = 2 \Rightarrow f = \{(1, -4), (2, -2), (2, 6), (3, 8)\}$$

در این صورت به دلیل وجود دو زوج مرتب $(2, -2)$ و $(2, 6)$ دیگر f تابع نیست. (غیرقابل قبول)

$$m \in \mathbb{N} \rightarrow m = 3 \Rightarrow f = \{(1, -3), (2, -1), (3, 6), (3, 8)\}$$

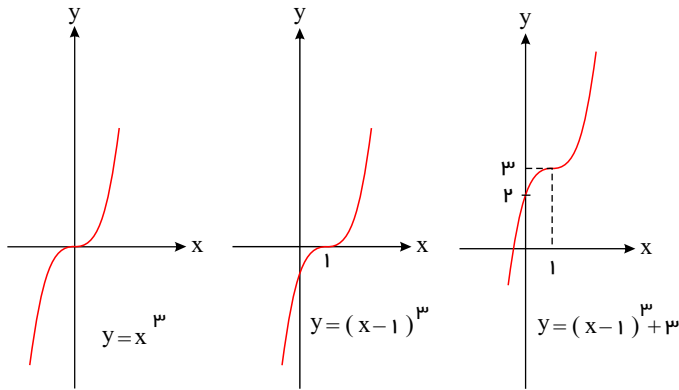
در این صورت به دلیل وجود دو زوج مرتب $(3, 6)$ و $(3, 8)$ دیگر f تابع نیست. (غیرقابل قبول)

در نتیجه هیچ مقدار طبیعی برای m وجود ندارد.

۱۶۲ ۱ ۲ ۳ ۴

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3 = (x-1)^3 + 3$$

برای رسم نمودار این تابع، ابتدا نمودار تابع $y = x^3$ را یک واحد به سمت راست منتقل کرده و سپس ۳ واحد به سمت بالا انتقال می دهیم.



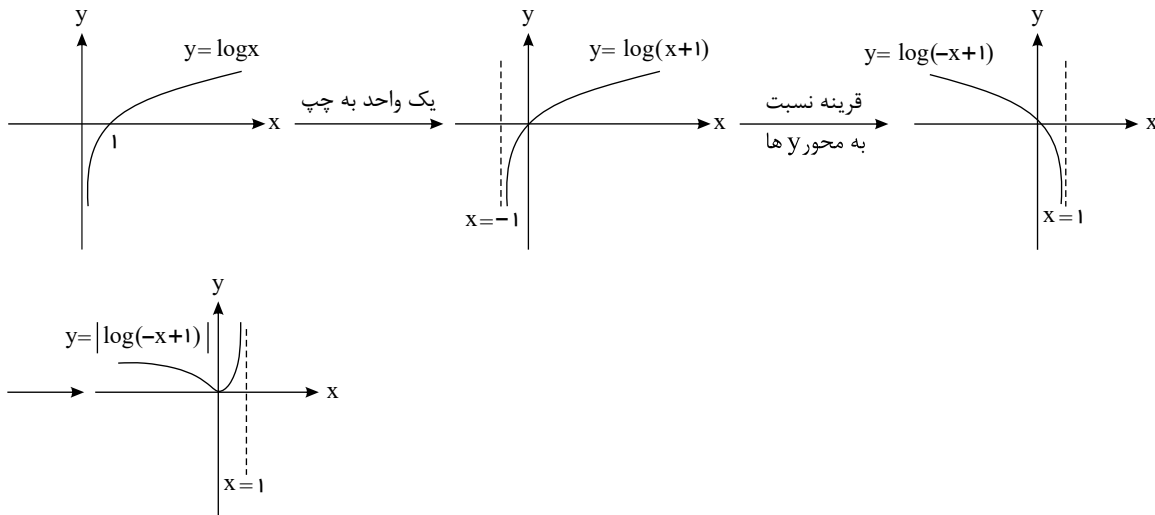
همانطور که مشاهده می‌کنید نمودار تابع f از ناحیهٔ چهارم نمی‌گذرد.

۱۶۳ ۱ ۲ ۳ ۴ توابع به فرم $y = |x - a| - |x - b|$ را توابع آبشاری (سرسره‌ای) می‌نامند و اگر $a > b$ باشد تابع به شکل است که بین ریشه‌های داخل قدرمطلق، اکیداً نزولی است پس ۵ و -۳ همان ریشه‌ها هستند.

$$\left. \begin{array}{l} a = 5 \\ b = -3 \end{array} \right\} \rightarrow (a, b) = (5, -3)$$

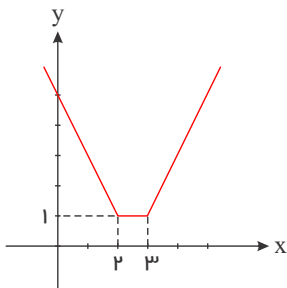
۱۶۴ ۱ ۲ ۳ ۴

نمودار تابع $y = |\log(-x + 1)|$ را مرحله به مرحله رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل نمودار تابع در فاصله $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی است.

۱۶۵ ۱ ۲ ۳ ۴ تابع داده‌شده یک تابع گلدانی است که در $x < 2$ اکیداً نزولی است.



$$y = |x - 2| + |x - 3| \xrightarrow{x < 2} y = -x + 2 - x + 3 \rightarrow y = -2x + 5$$



$$\begin{cases} f(x) = -2x + 5 \\ g(x) = 2x^2 - x - 10 \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} 2x^2 - x - 10 = -2x + 5 \rightarrow 2x^2 + x - 15 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 120 = 121 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 + 11}{4} = \frac{5}{2} & \text{غ ق ق (با توجه به } x < 2) \\ x = \frac{-1 - 11}{4} = -3 & \text{ق ق} \end{cases} \rightarrow \text{در یک نقطه مشترک هستند.}$$

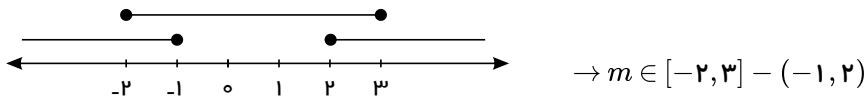
۱۶۶ ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا x ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

$$f: \{(-4, 2), (3, m^2 - m), (4, m^2 - m), (5, 6)\}$$

می‌دانیم در تابع صعودی اگر $x_1 < x_2$ باشد آن گاه $f(x_1) \leq f(x_2)$ است پس:

$$2 \leq m^2 - m \leq 6 \rightarrow \begin{cases} m^2 - m \geq 2 \rightarrow m^2 - m - 2 \geq 0 \rightarrow (m - 2)(m + 1) \geq 0 \\ \text{تعیین علامت} \\ \rightarrow m \leq -1 \text{ یا } m \geq 2 \quad (I) \\ m^2 - m \leq 6 \rightarrow m^2 - m - 6 \leq 0 \rightarrow (m - 3)(m + 2) \leq 0 \\ \text{تعیین علامت} \\ \rightarrow -2 \leq m \leq 3 \quad (II) \end{cases}$$

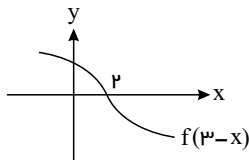
از اشتراک جواب‌های (I) و (II) داریم:



۱۶۷ ۱ ۲ ۳ ۴ f اکیداً صعودی و $y = 3 - x$ اکیداً نزولی است، پس ترکیب آن‌ها یعنی $f(3 - x)$ اکیداً نزولی است. چون

$f(1) = 0$ است، $x = 1$ صفر تابع $f(x)$ و $x = 2$ صفر تابع $f(3 - x)$ است.

پس به طور نمادین تابع $f(3 - x)$ به صورت مقابل است.



$$g(x) = \sqrt{\frac{x-4}{f(3-x)}} \Rightarrow \frac{x-4}{f(3-x)} \geq 0 \Rightarrow$$

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$
$x - 4$	-	-	0	+
$f(3 - x)$	+	0	-	-
$\frac{x - 4}{f(3 - x)}$	-	ن	+	0

$2 < x \leq 4 \Rightarrow$ ۳ و ۴: اعداد صحیح

۱۶۸ ۱ ۲ ۳ ۴ با رسم نمودار f داریم:

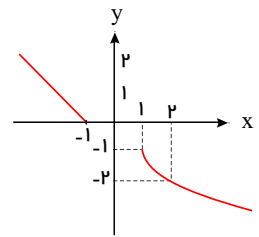
$$f(x) = \begin{cases} |x + 1| & ; x \leq -1 \\ -\frac{x}{2} + a & ; -1 < x < 1 \\ -\sqrt{x - 1} - 1 & ; x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow A \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{1}{2} + a \end{cases} B \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{2} + a \end{cases}$$

با توجه به نمودار زیر تابع f زمانی نزولی است که عرض نقطه $A(-1, \frac{1}{2} + a)$ کوچکتر یا مساوی صفر و عرض نقطه $B(1, -\frac{1}{2} + a)$ بزرگتر یا

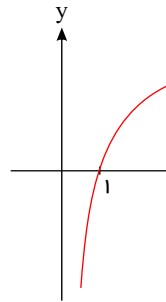
مساوی ۱- باشد، پس داریم:



$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} + a \leq 0 &\Rightarrow a \leq -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} + a \geq -1 &\Rightarrow a \geq -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \quad \text{اشتراک}$$



را می‌توان برای تابع f در نظر گرفت. برای تعیین دامنه تعریف توابع رادیکالی با



شکل فرضی x ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶۹

فرجه زوج، کافی است زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار دهیم.

$$(x^3 - x)f(x) \geq 0 \rightarrow \begin{cases} x^3 - x = 0 \rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x = 0, x = \pm 1 \\ f(x) = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$x^3 - x$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
≥ 0 عبارت	$+$	0	$-$	0	$+$

بنابراین دامنه تعریف تابع داده شده به صورت $\mathbb{R} - (-1, 0)$ است پس:

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \rightarrow a + b = -1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷۰

$$g(f(x)) = x^2 + x - 2 \rightarrow g(2x + 1) = x^2 + x - 2$$

$$f \circ g(3) = f(g(3)) \xrightarrow{2x+1=3 \rightarrow x=1} f(0) = 1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷۱

$$g(f(x)) = \frac{2\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) + 2}{2 - \left(\frac{2x-1}{x+1}\right)} = \frac{4x - 2 + 2x + 2}{x + 1} = \frac{6x}{3} = 2x$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷۲ روش اول:

$$g(f(x)) = g\left(\frac{2x+3}{2-x}\right) = \frac{1 - 3\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)}{\frac{2x+3}{2-x} + 2} = \frac{2-x-6x-9}{2-x} = \frac{-7x-7}{2-x} = \frac{7(-x-1)}{2-x} = -x-1$$

روش دوم:

یک عدد دلخواه مثلاً $x = 1$ را انتخاب می‌کنیم.

$$g(f(1)) = g(5) = \frac{1-15}{5+2} = \frac{-14}{7} = -2$$

فقط در گزینه‌ی سوم به ازای $x = -1$ عدد -2 به دست می‌آید.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷۳

$$f(x) = 3x + 4 \rightarrow f(g(x)) = 3g(x) + 4$$

$$3g(x) + 4 = 3x^2 - 6x - 5 \rightarrow 3g(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$\rightarrow g(x) = x^2 - 2x - 3 \rightarrow g(2) = 4 - 4 - 3 = -3$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷۴ روش اول:

ابتدا دامنه‌ی تعریف دو تابع f ، g را به دست می‌آوریم:

$$D_f: 3 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 3$$

$$D_g: x^2 + 2x > 0 \rightarrow x(x+2) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x < -2 \text{ یا } x > 0$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x < -2 \text{ یا } x > 0, \log_{\frac{1}{3}}^{x^2+2x} \leq 3\}$$

$$= \{x < -2 \text{ یا } x > 0, x^2 + 2x \leq 3^3\} = \{x < -2 \text{ یا } x > 0, x^2 + 2x - 8 \leq 0\}$$

$$= \{x < -2 \text{ یا } x > 0, (x+4)(x-2) \leq 0\} = \{x < -2 \text{ یا } x > 0, -4 \leq x \leq 2\}$$

$$= -4 \leq x < -2 \text{ یا } 0 < x \leq 2 \rightarrow [-4, -2) \cup (0, 2]$$

البته می‌توانیم $fog(x)$ را تشکیل داده (تابع را ساده نکنید) سپس دامنه‌ی آن را به دست آورید.

روش دوم:

 $x = -1$: در دامنه‌ی تعریف g قرار ندارد بنابراین در دامنه‌ی تعریف fog هم نباید باشد یعنی هر گزینه‌ای که $x = -1$ دارد نادرست است. پس

فقط گزینه‌ی چهارم درست است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷۵ باتوجه به شکل، دامنه‌ی تعریف تابع f به صورت $[0, 2]$ می‌باشد برای محاسبه‌ی دامنه‌ی تعریف $f(1-x)$ بدین صورت

عمل می‌کنیم.

$$0 \leq 1-x \leq 2 \rightarrow -1 \leq -x \leq 1 \rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

تابع $g(x)$ تابعی است کسری که مخرج آن $f(x)$ است برای بدست آوردن ریشه‌های مخرج کافی است $f(x)$ را مساوی صفر قرار دهیم.

$$f(x) = 0 \rightarrow x = 0, x = 2$$

$$D_{g(x)} = D_{f(1-x)} \cap D_{f(x)} - \{x | f(x) = 0\} = [-1, 1] \cap [0, 2] - \{0, 2\} = [0, 1] - \{0, 2\} = (0, 1]$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷۶ چون $fog(x) = 1$ است در ابتدا باید بیابیم که تابع $f(x)$ به ازای چه مقادیری از x برابر یک است پس باید معادله‌ی $f(x) = 1$ را حل کنیم.

$$f(x) = 1 \rightarrow x^3 - 7 = 1 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow x = 2$$

پس برای محاسبه‌ی ریشه‌های معادله‌ی $f(g(x)) = 1$ باید معادله‌ی $g(x) = 2$ را حل کنیم.

$$g(x) = 2 \rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 2 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}, x \geq 2 \rightarrow \text{جواب‌ها غیر قابل قبول اند} \\ \frac{x-1}{x+1} = 2 \rightarrow 2x+2 = x-1 \rightarrow x = -3, x < 2 \rightarrow \text{قابل قبول است} \end{cases}$$

بنابراین معادله یک جواب حقیقی دارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷۷ از روی شکل‌ها مشخص است که $D_f = [0, 1]$ و $R_f = [0, 2]$ و $D_g = [1, 4]$ و $R_g = [1, 3]$ است.

$$D_{gof} = \{x \in D_f, f(x) \in D_g\} = \{0 \leq x \leq 1, 1 \leq f(x) \leq 4\}$$

$$= \{0 \leq x \leq 1, \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}\} \rightarrow D_{gof} = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷۸ با توجه به نمودارهای داده شده، دامنه‌ی تعریف توابع f و g را می‌نویسیم.

$$D_f: x \geq -1, D_g: x \leq -\sqrt{2} \text{ یا } x \geq \sqrt{2} = R - (\sqrt{2}, \sqrt{2})$$



$$D_{fog} = \{x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} - (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), \underbrace{g(x) \geq -1}_{\text{همواره برقرار است}}\}$$

$$= \mathbb{R} - (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷۹

باتوجه به دامنه‌ی ترکیب توابع داریم:

$$D_{fof} = \{x \in D_f, f(x) \in D_f\}$$

مشخص است که دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 3 - \sqrt{x+1}$ برابر است با $D_f = [-1, +\infty)$. پس داریم:

$$\begin{cases} D_f: x \geq -1 \\ f(x) \in D_f: 3 - \sqrt{x+1} \geq -1 \Rightarrow \sqrt{x+1} \leq 4 \Rightarrow x+1 \leq 16 \Rightarrow x \leq 15 \end{cases}$$

از اشتراک این دو جواب، دامنه‌ی $f \circ f$ برابر با $[-1, 15]$ می‌شود که شامل ۱۷ عدد صحیح است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸۰

ابتدا دامنه‌ی تعریف تابع f را به دست می‌آوریم برای این کار، زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$6 + x - x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 - x - 6 \leq 0 \rightarrow (x-3)(x+2) \leq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -2 \leq x \leq 3$$

حال، برای پیدا کردن دامنه‌ی تعریف $y = f(1-2x)$ بدین صورت عمل می‌کنیم:

$$-2 \leq 1-2x \leq 3 \rightarrow -3 \leq -2x \leq 2 \xrightarrow{\div (-2)} \frac{3}{2} \geq x \geq -1 \rightarrow x \in \left[-1, \frac{3}{2}\right]$$

البته می‌توانید ابتدا $f(1-2x)$ را تشکیل داده و سپس دامنه‌ی تعریف آن را به دست آورید.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸۱

باتوجه به نمودار داده شده دامنه‌ی توابع f و g را مشخص می‌کنیم.

$$D_f = [-5, 3], D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R}, g(x) \in [-5, 3]\} = \{x \in \mathbb{R}, x \in [-3, 3]\} = [-3, 3]$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸۲

$$f(x) = 1 - \sqrt{x+1} \rightarrow D_f: x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1$$

$$D_{fof(x)} = \{x \in D_f, f(x) \in D_f\} = \{x \geq -1, 1 - \sqrt{x+1} \geq -1\}$$

$$= \{x \geq -1, \sqrt{x+1} \leq 2\} = \{x \geq -1, x+1 \leq 4\} = \{x \geq -1, x \leq 3\} = -1 \leq x \leq 3$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸۳

$$\begin{cases} fog(x) = f(g(x)) = \frac{2(x+4)-1}{x+4+2} = \frac{2x+7}{x+6} \\ gof(x) = g(f(x)) = \frac{2x-1}{x+2} + 4 = \frac{2x-1+4x+8}{x+2} = \frac{6x+7}{x+2} \end{cases}$$

$$\text{پس: } \frac{2x+7}{x+6} = \frac{6x+7}{x+2} \rightarrow 6x^2 + 36x + 7x + 42 = 2x^2 + 4x + 7x + 14$$

$$\rightarrow 4x^2 + 32x + 28 = 0 \rightarrow x^2 + 8x + 7 = 0 \rightarrow (x+1)(x+7) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -7 \end{cases}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸۴

$$gof(a) = 15 \rightarrow g(f(a)) = 15 \xrightarrow{f(a)=t} g(t) = 15$$

$$\rightarrow g(t) = 2f(t+2) - 3 = 15 \rightarrow 2f(t+2) = 18$$



$$\rightarrow f(t+2) = 9 \xrightarrow{f(6)=9} t+2=6 \rightarrow t=4$$

پس: $f(a) = 4 \rightarrow a = 3$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸۵

$$f \circ f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(f\left(\frac{2}{3}\right)\right) = f\left(\cot\left(\frac{\pi}{4} \times \frac{2}{3}\right)\right) = f\left(\cot \frac{\pi}{6}\right) = f(\sqrt{3}) = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸۶ برای حل این تست از تعریف دامنه‌ی تعریف ترکیب توابع استفاده می‌کنیم.

$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f, f(x) \in D_f\} = \{x \in [-2, 1], -2 \leq 4x - 3 \leq 1\}$$

$$= \{x \in [-2, 1], 1 \leq 4x \leq 4\} = \{x \in [-2, 1], \frac{1}{4} \leq x \leq 1\} = \frac{1}{4} \leq x \leq 1$$

$$D_{f \circ f} = \left[\frac{1}{4}, 1\right] \rightarrow b - a = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸۷ از روی ماشین داده شده متوجه می‌شویم که $f(x) = 1 + \sqrt[3]{x}$ و $g(f(x)) = x$ است.

$$\left. \begin{aligned} f(x) = 1 + \sqrt[3]{x} &\rightarrow f(8) = 1 + \sqrt[3]{8} = 1 + 2 = 3 \\ g(f(x)) = x &\xrightarrow{x=1} g(2) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(8) + g(2) = 3 + 1 = 4$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸۸

$$f \circ g(x) = 0 \rightarrow f(g(x)) = 0 \xrightarrow{x \geq 0} \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 - 1 = 0 \rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} = 1 \rightarrow (x-1)^2 = 4$$

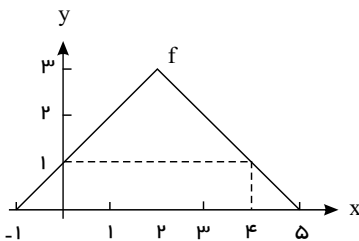
$$\rightarrow \begin{cases} x-1=2 \rightarrow x=3 & \text{ق ق} \\ x-1=-2 \rightarrow x=-1 & \text{غ ق (با توجه به } x \geq 0 \text{)} \end{cases}$$

$$f \circ g(x) = 0 \rightarrow f(g(x)) = 0 \xrightarrow{x < 0} 2\left(\frac{x-1}{2}\right) + 1 = 0 \rightarrow x-1+1=0 \rightarrow x=0 \text{ (با توجه به شرط)}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸۹ دامنه‌ی تابع $g \circ f$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f, f(x) \in D_g\}$$

از روی نمودارهای f و g داریم: $D_g = (1, 3], D_f = [-1, 5]$ بنابراین $D_{g \circ f} = \{x \in [-1, 5], f(x) \in (1, 3]\}$ است. باید حدود x را طوری تعیین کنیم که داشته باشیم $1 < f(x) \leq 3$. با توجه به نمودار f باید $0 < x < 4$ باشد.



پس $D_{g \circ f} = \{x \in [-1, 5], x \in (0, 4)\} = (0, 4)$ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹۰

$$f(x) = \frac{4}{x-1}, D_f: x \neq 1, g(x) = \frac{1}{2-x}, D_g: x \neq 2$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = \{x \neq 1 | f(x) \neq 2\}$$



$$f(x) \neq 2 \Rightarrow \frac{4}{x-1} \neq 2 \Rightarrow x-1 \neq 2 \Rightarrow x \neq 3 \Rightarrow D_{gof} = \mathbb{R} - \{1, 3\}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹۱

$$(2, 3) \in f, (1, 3) \in fog \Rightarrow (1, 2) \in g \Rightarrow g(1) = 2$$

$$(a, 4) \in f, (4, 4) \in fog \Rightarrow (4, a) \in g \Rightarrow g(4) = a \Rightarrow 4 + \sqrt{4} = a \Rightarrow a = 6$$

$$(12, 1) \in f, (b, 1) \in fog \Rightarrow (b, 12) \in g \Rightarrow g(b) = 12 \Rightarrow b + \sqrt{b} = 12 \Rightarrow b = 9$$

بنابراین $a + b = 15$ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹۲

$$fog(x) = 12 \Rightarrow f(g(x)) = 12 \Rightarrow (1 - 2x)^2 - 3(1 - 2x) + 8 = 12$$

$$\rightarrow 1 + 4x^2 - 4x - 3 + 6x + 8 = 12 \rightarrow 4x^2 + 2x - 6 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = \frac{c}{a} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

پس $|\alpha - \beta| = |1 + \frac{3}{2}| = \frac{5}{2} = 2,5$ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹۳

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1, D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sqrt{4-x} + 1, D_g = (-\infty, 4]$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{x \leq 4 | (\sqrt{4-x} + 1) \in \mathbb{R}\} = (-\infty, 4]$$

$$fog(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{4-x} + 1) = (\sqrt{4-x} + 1 - 1)^2 - 1$$

$$= 4 - x - 1 = 3 - x, D_{fog} = (-\infty, 4]$$

برای پیدا کردن برد fog ، از روی دامنه fog شروع به ساختن fog می‌کنیم:

$$x \leq 4 \Rightarrow -x \geq -4 \Rightarrow 3 - x \geq -1 \Rightarrow fog(x) \geq -1 \Rightarrow R_{fog} = [-1, +\infty)$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹۴

$$f(x) = 8x^3 - 1 \rightarrow f(g(x)) = 8g^3(x) - 1 \quad (I)$$

$$(fog)(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 1 \rightarrow f(g(x)) = (x+1)^3 - 1 \quad (II)$$

$$(I), (II) : 8g^3(x) - 1 = (x+1)^3 - 1 \rightarrow g^3(x) = \frac{1}{8}(x+1)^3 \rightarrow g(x) = \frac{1}{2}(x+1)$$

$$\text{پس: } (f+g)(-1) = f(-1) + g(-1) = -9 + 0 = -9$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹۵

تابع gof را تشکیل می‌دهیم.

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x - [x]) = (x - [x]) + [x - [x]]$$

می‌دانیم عدد صحیح در جمع و تفریق می‌تواند از داخل براکت خارج شود و چون $[x]$ عددی صحیح است، داریم:

$$(gof)(x) = x - [x] + [x] - [x] = x - [x]$$

$$\text{می‌دانیم: } 0 \leq x - [x] < 1 \Rightarrow 0 \leq gof(x) < 1 \Rightarrow R_{gof} = [0, 1)$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹۶

$$fog(x) = \frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow f(g(x)) = \frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{2x+1}{x-1}$$



$$\frac{x-1}{x} = t \Rightarrow x-1 = tx \Rightarrow x(1-t) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{1-t}$$

$$f(t) = \frac{\frac{2}{1-t} + 1}{\frac{1}{1-t} - 1} = \frac{2+1-t}{1-(1-t)} = \frac{3-t}{t} \Rightarrow f(x) = \frac{3-x}{x}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{3-x}{x} + \frac{x-1}{x} = \frac{3-x+x-1}{x} = \frac{2}{x}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹۷

$$f \circ g(x) = x^6 - 2x^5 + x^4 + 1 \rightarrow f(g(x)) = x^6 - 2x^5 + x^4 + 1$$

$$\rightarrow f(x^3 - x) = (x^3 - x)^2 + 1 \xrightarrow{x^3 - x = t} f(t) = t^2 + 1$$

$$\rightarrow f(3) = 3^2 + 1 = 10$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹۸ با توجه به ماشین، $(g \circ f)(x) = -6x^2 - 2x + 3$ و $g(x) = 1 - 2x$ است، پس داریم:

$$g(f(x)) = 1 - 2f(x) = -6x^2 - 2x + 3 \Rightarrow 2f(x) = 6x^2 + 2x - 2$$

$$\Rightarrow f(x) = 3x^2 + x - 1 \Rightarrow f(1) = 3 + 1 - 1 = 3$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹۹ از روی نمودار f مشخص است که $f(3) = 0$ و $f(8) = 0$ است.

$$(f \circ g)(x) = 0 \rightarrow f(g(x)) = 0 \rightarrow g(x) = 3 \text{ یا } g(x) = 8$$

اکنون باید این دو معادله را حل کنیم.

$$g(x) = 3 \rightarrow 2\sqrt{x} + x = 3 \rightarrow 2\sqrt{x} = 3 - x \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4x = 9 + x^2 - 6x$$

$$\rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = 1 \\ x = 9 \end{cases} \text{ (غ ق در معادله صدق نمی‌کند)}$$

$$g(x) = 8 \rightarrow 2\sqrt{x} + x = 8 \rightarrow 2\sqrt{x} = 8 - x \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4x = 64 + x^2 - 16x \rightarrow x^2 - 20x + 64 = 0$$

$$\rightarrow (x-4)(x-16) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 16 \end{cases} \text{ (غ ق در معادله صدق نمی‌کند)}$$

پس تابع $f \circ g$ در نقاط به طول‌های ۱ و ۴ محور x را قطع می‌کند بنابراین $a+b=5$ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰۰

$$g(f(a)) = 3 \xrightarrow{\text{باید مشخص کنید به ازای کدام } x \text{ در تابع } g \text{ حاصل برابر ۳ می‌شود}} f(a) = -2$$

$$a \geq 0 \rightarrow f(a) = \sqrt{a} \rightarrow \sqrt{a} = -2 \text{ امکان ندارد}$$

$$a < 0 \rightarrow f(a) = -\sqrt{-a} \rightarrow -2 = -\sqrt{-a} \rightarrow -a = 4 \rightarrow a = -4$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰۱

$$(2, 2) \in f \circ g \rightarrow f(g(2)) = 2 \xrightarrow{f(0)=2} a^2 + a = 0$$

$$\rightarrow a(a+1) = 0 \rightarrow a = 0, a = -1$$

$$\frac{1}{2} \text{ قرار دهید. } f\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \frac{2x+1}{x^2+1} \text{ با توجه به شکل داده شده}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰۲



$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \rightarrow x^2+1=2x \rightarrow x^2-2x+1=0 \rightarrow (x-1)^2=0 \rightarrow x=1$$

$$f\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \frac{2x+1}{x^2+1} \xrightarrow{x=1} f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰۴

$$f \circ g(\sqrt{2}-1) = f(\overbrace{g(\sqrt{2}-1)})^{+} = f(\sqrt{2}-1+3) = f(2+\sqrt{2}) = \frac{|2+\sqrt{2}|}{2+\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = 1$$

$$g \circ f(1-\sqrt{2}) = g(f(1-\sqrt{2})) = g(\overbrace{1-\sqrt{2}}^{-}) = g\left(\frac{-(1-\sqrt{2})}{1-\sqrt{2}}\right) = g(-1) \xrightarrow{\text{ضابطه‌ی بالا}} (-1)^2 - 1 = 0$$

$$\text{پس: } f \circ g(\sqrt{2}-1) - g \circ f(1-\sqrt{2}) = 1 - 0 = 1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰۴ f تابعی خطی است که از نقاط $A(0, 2)$ و $B(-4, 0)$ می‌گذرد، پس باید معادله این خط را بیابیم:

$$\frac{y-y_A}{x-x_A} = \frac{y_A-y_B}{x_A-x_B} \rightarrow \frac{y-2}{x-0} = \frac{2-0}{0-(-4)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow 2y-4=x \rightarrow 2y=x+4 \rightarrow y=\frac{1}{2}x+2$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow f(20) = 10 + 2 = 12 \Rightarrow f \circ f(20) = f(f(20))$$

$$= f(12) = \frac{1}{2} \times 12 + 2 = 6 + 2 = 8$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰۵

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

$$(f \circ g)(x) = 0 \Rightarrow f(g(x)) = 0 \Rightarrow f(x^2 - x + 1) = 0 \Rightarrow (x^2 - x + 1 - 1)(x^2 - x + 1 - 2) = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - x)(x^2 - x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1 \\ x^2 - x - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 4 = 5} x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

پس معادله $(f \circ g)(x) = 0$ دارای ۴ ریشه حقیقی متمایز می‌باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰۶ هر یک از عبارات را جداگانه محاسبه می‌کنیم.

$$f(g(1-\sqrt{2})) = f(\underbrace{|1-\sqrt{2}|}_{-}) = f(\sqrt{2}-1) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right] = \left[\frac{1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}\right] = \underbrace{[\sqrt{2}+1]}_{2,4} = 2$$

$$g(f(1-\sqrt{2})) = g\left(\left[\frac{1}{1-\sqrt{2}}\right]\right) = g\left(\left[\frac{1}{1-\sqrt{2}} \times \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right]\right) = g\left(\left[\frac{1+\sqrt{2}}{1-2}\right]\right)$$

$$= g(\underbrace{[-1-\sqrt{2}]}_{-2,4}) = g(-3) = |-3| = 3$$

$$\text{پس: } f(g(1-\sqrt{2})) - g(f(1-\sqrt{2})) = 2 - 3 = -1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰۷

$$f \circ g(-2) = f(g(-2)) = f(-1) = a$$



می دانیم که $D_{fog} = \{x \in D_g, g(x) \in D_f\}$ است پس:

$$fog(1) \rightarrow 1 \in D_g \rightarrow c = 1, g(1) \in D_f \rightarrow 3 \in D_f \rightarrow b = 3$$

$$\text{طبق فرض: } fog(-2) + fog(1) = 5 \rightarrow a + 2 = 5 \rightarrow a = 3 \rightarrow a + b + c = 7$$

دامنه تعریف تابع $f(x)$ به صورت $x \geq 0$ است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۲۰۸)

$$D_{fog(x)} = \{x \in D_f, f(x) \in D_g\} = \{x \geq 0, \sqrt{x} - x \geq 0\}$$

اکنون نامعادله $\sqrt{x} - x \geq 0$ را حل می کنیم.

$$\sqrt{x} - x \geq 0 \rightarrow \sqrt{x} \geq x \rightarrow x \geq x^2 \rightarrow x^2 - x \leq 0 \rightarrow x(x-1) \leq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 \leq x \leq 1$$

$$\text{پس: } D_{fog(x)} = \{x \geq 0, 0 \leq x \leq 1\} = 0 \leq x \leq 1 \rightarrow x \in [0, 1]$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۲۰۹)

$$f(x) = 3x - 2, (gof)(x) = g(f(x)) = 9x^2 - 9x + 2 \Rightarrow g(3x - 2) = 9x^2 - 9x + 2$$

$$3x - 2 = t \Rightarrow x = \frac{t+2}{3}$$

$$g(t) = 9\left(\frac{(t+2)^2}{9}\right) - 9\left(\frac{t+2}{3}\right) + 2 \Rightarrow g(t) = t^2 + 4 + 4t - 3t - 6 + 2 \Rightarrow g(t) = t^2 + t \Rightarrow g(x) = x^2 + x$$

$$\text{پس: } (g-f)(x) = g(x) - f(x) = x^2 + x - (3x - 2) = x^2 - 2x + 2$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۲۱۰) با توجه به نمودارهای داده شده، دامنه توابع f و g و ضابطه g را می یابیم.

$$D_f = [0, +\infty), D_g = (-\infty, 0]$$

ضابطه تابع خطی $g(x)$ را که از دو نقطه $\begin{vmatrix} -2 \\ 0 \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} 0 \\ -2 \end{vmatrix}$ می گذرد را می نویسیم:

$$\frac{y+2}{x} = \frac{-2-0}{0+2} = -1 \Rightarrow y+2 = -x \Rightarrow y = -x-2 \Rightarrow g(x) = -x-2$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x \leq 0, g(x) \geq 0\} = \{x \leq 0, -x-2 \geq 0\} = \{x \leq 0, x \leq -2\} = x \leq -2$$

اعداد صحیح منفی که در دامنه حضور ندارند فقط ۱- می باشد.

(۱) (۲) (۳) (۴) (۲۱۱) اول تابع $\frac{1}{g+1}$ را پیدا می کنیم:

$$g+1 = \{(-1, 1), (2, 0), (3, 5)\} \Rightarrow \frac{1}{g+1} = \{(-1, 1), (\underbrace{2, \frac{1}{0}}_{\text{تعریف نشده}}, (3, \frac{1}{5}))\}$$

$$\frac{1}{g+1} = \{(-1, 1), (3, \frac{1}{5})\}$$

حال $fo(\frac{1}{g+1})$ را پیدا می کنیم:

$$\left. \begin{aligned} x = -1 &\Rightarrow fo\left(\frac{1}{g+1}\right)(-1) = f(1) = \frac{3(1)-1}{2} = 1 \Rightarrow (-1, 1) \\ x = 3 &\Rightarrow fo\left(\frac{1}{g+1}\right)(3) = f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{\frac{3}{5}-1}{2} = \frac{-\frac{2}{5}}{2} = -\frac{1}{5} \Rightarrow (3, -\frac{1}{5}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow fo\left(\frac{1}{g+1}\right) = \{(-1, 1), (3, -\frac{1}{5})\}$$



مجموع عضوهای برد تابع برابر است با: $1 + (-\frac{1}{5}) = \frac{4}{5}$

۲۱۲ ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا ضابطه تابع خطی g که گذرنده از دو نقطه $(0, -4)$ و $(8, 0)$ است را می نویسیم.

$$\frac{y}{x+4} = \frac{0-8}{-4-0} = 2 \rightarrow y = 2x + 8 \rightarrow g(x) = 2x + 8$$

با توجه به نمودار تابع f ، در نقاط ۱ و ۳ مقدار تابع f صفر است، یعنی $f(1) = 0$ و $f(3) = 0$ پس داریم:

$$f(g(x)) = 0 \Rightarrow g(x) = 1 \quad \text{یا} \quad g(x) = 3$$

حال ضابطه تابع g را می یابیم.

$$g(x) = 1 \Rightarrow 2x + 8 = 1 \Rightarrow x = -\frac{7}{2}$$

$$g(x) = 3 \Rightarrow 2x + 8 = 3 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$$

$$\text{مجموع جواب ها} = -\frac{7}{2} - \frac{5}{2} = -6$$

۲۱۳ ۱ ۲ ۳ ۴ می دانیم:

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

بنابراین:

$$g(f(x)) = \begin{cases} g(0) = b & x \in \mathbb{Z} \\ g(-1) = 1 - a + b & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

چون برد تابع برابر $\{2\}$ است، بنابراین:

$$\begin{cases} b = 2 \\ 1 - a + b = 2 \xrightarrow{b=2} a = 1 \end{cases}$$

۲۱۴ ۱ ۲ ۳ ۴

$$x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow x \Rightarrow g(f(x)) = x, \quad f(x) = \frac{2^x - 1}{3} \Rightarrow g\left(\frac{2^x - 1}{3}\right) = x$$

$$\frac{2^x - 1}{3} = 5 \Rightarrow 2^x = 16 = 2^4 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow g(5) = 4$$

۲۱۵ ۱ ۲ ۳ ۴ باید تابع $g(f(x))$ را تشکیل دهیم. ابتدا دامنه gof را می یابیم:

$$D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = \{x \geq -2 | \sqrt{x+2} \in \mathbb{R}\} \Rightarrow D_{gof} = [-2, +\infty)$$

حال تابع gof را تشکیل می دهیم:

$$g(f(x)) = g(\sqrt{x+2}) = (\sqrt{x+2})^2 = x+2$$

بنابراین:

$$g(f(x)) = 5 \Rightarrow x+2 = 5 \Rightarrow x = 3$$

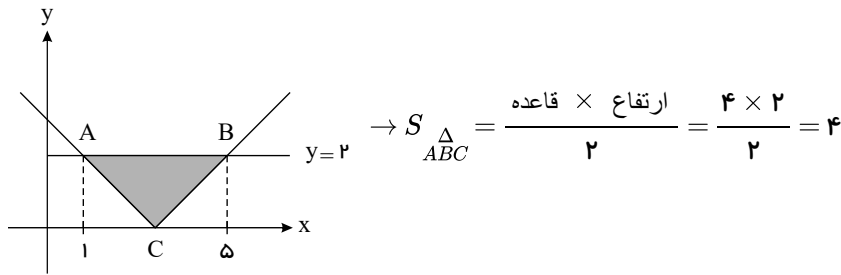
پس معادله فقط یک ریشه مثبت دارد.

۲۱۶ ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا تابع fog را تشکیل می دهیم:

$$y = f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 6x + 10 - 1} \Rightarrow y = \sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$$

حال نمودار $(fog)(x) = |x-3|$ را با خط $y=2$ قطع می دهیم:

$$|x-3| = 2 \Rightarrow x-3 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$$



۲۱۷ ابتدا دامنه‌ی تعریف دو تابع f, g را بدست می‌آوریم. ۱ ۲ ۳ ۴

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} \rightarrow D_f = R - \{-1, 1\}$$

$$g(x) = \sqrt{x-x^2} \rightarrow D_g : x-x^2 \geq 0 \rightarrow x(1-x) \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 \leq x \leq 1$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f, f(x) \in D_g\} = \underbrace{\{x \neq 1, x \neq -1\}}_I, \quad 0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1$$

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} \geq 0 \rightarrow 1-x^2 > 0 \rightarrow x^2 < 1 \rightarrow -1 < x < 1 \quad (II)$$

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \rightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2} - 1 \leq 0 \rightarrow \frac{1+x^2-1+x^2}{1-x^2} \leq 0 \rightarrow \frac{2x^2}{1-x^2} \leq 0$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
≤ 0 عبارت		-	+	+	-

$$\rightarrow x < -1 \quad \text{یا} \quad x > 1 \quad \text{یا} \quad x = 0 \quad (III)$$

از اشتراک I و II و III به جواب $x = 0$ می‌رسیم.

۲۱۸ چون $f \circ g$ از درجه اول است، پس f و g توابعی از درجه اول هستند. اگر فرض کنیم $f(x) = ax + b$ خواهیم داشت: ۱ ۲ ۳ ۴

$$f(x) + g(x) = 4 \Rightarrow g(x) = 4 - ax - b$$

$$f(g(x)) = 7 - 4x \Rightarrow ag(x) + b = 7 - 4x \Rightarrow a(4 - ax - b) + b = 7 - 4x$$

$$\Rightarrow -a^2x + 4a - ab + b = 7 - 4x \Rightarrow \begin{cases} -a^2 = -4 \Rightarrow a = \pm 2 \\ 4a - ab + b = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 2 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow g(x) = -2x + 3 \Rightarrow g(2) = -1 \\ a = -2 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow g(x) = 2x - 1 \Rightarrow g(2) = 3 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{جمع}} 2$$

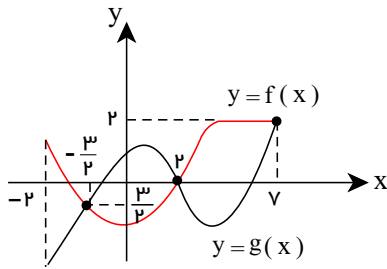
۲۱۹ برای یافتن دامنه‌ی $y = \frac{1}{\sqrt{f(x) - g(x)}}$ باید x هایی را بیابیم که برای آن‌ها حاصل $f(x) - g(x)$ مثبت است، ۱ ۲ ۳ ۴

یعنی باید داشته باشیم $f(x) - g(x) > 0$ یا $f(x) > g(x)$.

توجه کنید که $f(x) - g(x)$ نمی‌تواند برابر صفر باشد چون باعث صفر شدن مخرج کسر می‌شود.



اگر نمودار هر دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم خواهیم داشت:



باتوجه به شکل به ازای مقادیری از x که به $(2, 7) \cup [-2, -\frac{3}{2}]$ تعلق دارد $f(x)$ بزرگتر از $g(x)$ است.

۲۲۰ ابتدا دامنه‌ی تعریف دو تابع f و g را بدست می‌آوریم. ۱ ۲ ۳ ۴

$$f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} \rightarrow D_f = R$$

$$g(x) = \sqrt{x-x^2} \rightarrow D_g : x-x^2 \geq 0 \rightarrow x(1-x) \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 \leq x \leq 1$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f, f(x) \in D_g\} = \underbrace{\{x \in R\}}_I, 0 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$$

$$\underbrace{\frac{1-x^2}{1+x^2}}_{+} \geq 0 \rightarrow 1-x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 1 \rightarrow -1 \leq x \leq 1 : II$$

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \rightarrow \frac{1-x^2}{1+x^2} - 1 \leq 0 \rightarrow \frac{1-x^2-1-x^2}{1+x^2} \leq 0 \rightarrow \underbrace{\frac{-2x^2}{1+x^2}}_{\text{منفی یا صفر}} \leq 0 \quad III : \text{همواره برقرار است}$$

از اشتراک سه جواب به دست آمده به جواب $-1 \leq x \leq 1$ می‌رسیم. $(x \in [-1, 1])$

۲۲۱ ۱ ۲ ۳ ۴

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 \rightarrow f(g(x)) = g^2(x) - 4g(x) + 3$$

$$f \circ g(x) = x^2 + 3x + \frac{5}{4} \rightarrow f(g(x)) = x^2 + 3x + \frac{5}{4}$$

$$\text{پس} : g^2(x) - 4g(x) + 3 = x^2 + 3x + \frac{5}{4} \rightarrow (g(x) - 2)^2 - 4 + 3 = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + \frac{5}{4}$$

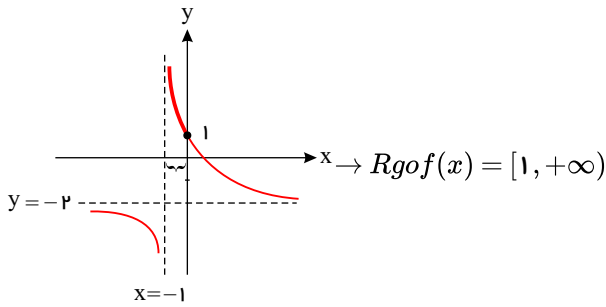
$$\rightarrow (g(x) - 2)^2 - 1 = (x + \frac{3}{2})^2 - 1 \rightarrow (g(x) - 2)^2 = (x + \frac{3}{2})^2$$

$$\rightarrow \begin{cases} g(x) - 2 = x + \frac{3}{2} \rightarrow g(x) = x + \frac{7}{2} \rightarrow \text{شیب خط، مثبت است} \\ g(x) - 2 = -x - \frac{3}{2} \rightarrow g(x) = -x + \frac{1}{2} \rightarrow \text{شیب خط، منفی است} \end{cases}$$

$$g(f(x)) = g(f(x)) = x^2 - 4x + 3 + \frac{7}{2} = x^2 - 4x + \frac{13}{2}$$

۲۲۲ ۱ ۲ ۳ ۴

در تابع $g \circ f(x)$ ورودی تابع $x - [x]$ است که می‌دانیم $-1 < [x] - x \leq 0$ است کافی است تابع $g(x)$ را رسم کرده و مشخص می‌کنیم وقتی $-1 < x \leq 0$ است چه عرضی به ما می‌دهد.



طرح این سوال کاملاً خارج از اهداف کتاب درسی است.

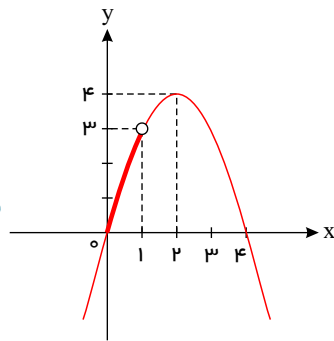
روش اول: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۲۳

می‌دانیم که $0 \leq u - [u] < 1$ است پس $0 \leq 2x - [2x] < 1$ یعنی $0 \leq f(x) < 1$ است.

$$gof(x) = g(f(x)) = -f^2(x) + 4f(x) = -(f^2(x) - 4f(x)) = -((f(x) - 2)^2 - 4) = -(f(x) - 2)^2 + 4$$

$$0 \leq f(x) < 1 \rightarrow -2 \leq f(x) - 2 < -1 \rightarrow 1 < (f(x) - 2)^2 \leq 4 \rightarrow -1 > -(f(x) - 2)^2 \geq -4$$

$$\rightarrow 3 > -(f(x) - 2)^2 + 4 \geq 0 \rightarrow 0 \leq gof(x) < 3 \rightarrow R_{gof} = [0, 3)$$



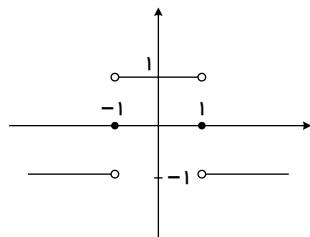
روش دوم: در تابع $gof(x)$ ورودی تابع $2x - [2x]$ است که می‌دانیم $0 \leq 2x - [2x] < 1$ است کافی است

تابع $g(x)$ را رسم کرده و مشخص کنیم وقتی $0 \leq x < 1$ است چه عرضی به ما می‌دهد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۲۴

$$gof(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 1 & f(x) > 0 \\ 0 & f(x) = 0 \\ -1 & f(x) < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & x = \pm 1 \\ -1 & x > 1 \text{ یا } x < -1 \end{cases}$$



$x = -1$ و $x = 1$ طول نقاط ناپیوستگی هستند.

روش اول: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۲۵

$$2x - 3 = t \rightarrow 2x = t + 3 \rightarrow x = \frac{t + 3}{2}$$



$$\text{پس: } f(t) = 4\left(\frac{t+3}{2}\right)^2 - 14\left(\frac{t+3}{2}\right) + 13 \rightarrow f(t) = (t+3)^2 - 7(t+3) + 13$$

$$\rightarrow f(t) = t^2 + 9 + 6t - 7t - 21 + 13 \rightarrow f(t) = t^2 - t + 1 \rightarrow f(x) = x^2 - x + 1$$

روش دوم: یک عدد دلخواه مانند $x = 2$ را انتخاب می‌کنیم.

$$f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13 \xrightarrow{x=2} f(1) = 16 - 28 + 13 \rightarrow f(1) = 1$$

تنها گزینه‌ی چهارم است که اگر به جای x آن عدد یک قرار دهیم حاصل برابر یک می‌شود.

روش اول: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۲۶

$$f \circ g(x) = 8x^2 + 6x + 5 \rightarrow f(g(x)) = 8x^2 + 6x + 5 \rightarrow f(2x+1) = 8x^2 + 6x + 5$$

برای پیدا کردن $f(x)$ باید $2x+1$ را مساوی t قرار دهیم.

$$2x+1=t \rightarrow 2x=t-1 \rightarrow x=\frac{t-1}{2}$$

$$\text{پس: } f(t) = 8\left(\frac{t-1}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{t-1}{2}\right) + 5 \rightarrow f(t) = 8\left(\frac{t^2+1-2t}{4}\right) + 3(t-1) + 5$$

$$\rightarrow f(t) = 2t^2 + 2 - 4t + 3t - 3 + 5 \rightarrow f(t) = 2t^2 - t + 4$$

$$\rightarrow f(x) = 2x^2 - x + 4$$

روش دوم: $f(2x+1) = 8x^2 + 6x + 5$ است. به جای x یک عدد دلخواه مثلاً صفر قرار می‌دهیم:

$$x=0 \rightarrow f(1)=5$$

گزینه‌ای درست است که اگر در آن $x=1$ را قرار دهیم حاصل برابر ۵ شود که گزینه‌ی سوم است.

ابتدا تابع $f \circ g(x)$ را تشکیل می‌دهیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۲۷

$$g(x) = x - \sqrt{x} \rightarrow f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x - \sqrt{x})$$

برای محاسبه ریشه‌های معادله $f(x - \sqrt{x}) = 0$ ابتدا باید ببینیم که تابع $f(x)$ چند بار محور x ها را قطع می‌کند همانطور که می‌دانیم:

$$f(6) = 0 \Rightarrow x - \sqrt{x} = 6 \Rightarrow x - 6 = \sqrt{x} \rightarrow x^2 - 12x + 36 = x$$

$$\Rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0 \quad \begin{matrix} \text{غ ق ق} \\ x=4 \\ x=9 \end{matrix}$$

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = 0 \Rightarrow x - \sqrt{x} = -\frac{1}{4} \Rightarrow x - \sqrt{x} + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \quad x = \frac{1}{4}$$

پس تابع $f \circ g$ دو بار محور x ها را قطع می‌کند.

ابتدا ضابطه‌ی $f(x)$ و از روی آن ضابطه‌ی $f(2x)$ را بدست می‌آوریم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۲۸

$$x+3=t \rightarrow x=t-3 \rightarrow f(t) = t-3 + \frac{5}{t-3} \rightarrow f(x) = x-3 + \frac{5}{x-3}$$

$$\rightarrow f(2x) = 2x-3 + \frac{5}{2x-3}$$

$$y = 3 - f(2x) = 3 - 2x + 3 - \frac{5}{2x-3} \rightarrow y = 6 - 2x - \frac{5}{2x-3}$$

گزینه‌ی سوم در این رابطه صدق می‌کند.



۱ ۲ ۳ ۴ ۲۲۹

$$f(x) = \frac{x+1}{x+a} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{-\frac{1}{x}+1}{-\frac{1}{x}+a} = \frac{\frac{-1+x}{x}}{\frac{-1+ax}{x}} = \frac{x-1}{ax-1}$$

$$f(x) \cdot f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{x+1}{x+a} \times \frac{x-1}{ax-1} = \frac{x^2-1}{(x+a)(ax-1)} = -1$$

$$\Rightarrow x^2-1 = -(ax^2-x+a^2x-a) \Rightarrow x^2-1 = -ax^2+x-a^2x+a$$

$$\Rightarrow x^2-1 = -ax^2 + (1-a^2)x + a \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -a=1 \Rightarrow a=-1 \\ 1-a^2=0 \Rightarrow a=\pm 1 \\ a=-1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} a=-1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۳۰

$$x - \frac{1}{x} = t \rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = t^2 \rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = t^2 + 4$$

$$f(t) = \pm \sqrt{t^2 + 4} + 6 \rightarrow f(x) = 6 \pm \sqrt{x^2 + 4} \rightarrow f(\sqrt{2}) = 6 \pm \sqrt{6}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۳۱ تابع خطی را به صورت $f(x) = ax + b$ نشان می‌دهند.

$$f(3) = f(-3) + 4 \rightarrow 3a + b = -3a + b + 4 \rightarrow 6a = 4 \rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$f(2) = 1 \rightarrow 2a + b = 1 \xrightarrow{a=\frac{2}{3}} \frac{4}{3} + b = 1 \rightarrow b = \frac{-1}{3}$$

بنابراین ضابطه تابع به صورت $f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ است که اگر در ضابطه به جای x عدد صفر قرار دهیم مقدار $y = \frac{-1}{3}$ حاصل شود.۱ ۲ ۳ ۴ ۲۳۲ فرم کلی تابع خطی بصورت $f(x) = ax + b$ است که داریم:

$$f(x-1) + f(x+2) = x \Rightarrow a(x-1) + b + a(x+2) + b = x$$

$$\Rightarrow ax - a + b + ax + 2a + b = x \Rightarrow 2ax + a + 2b = x \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{2} \\ a + 2b = 0 \rightarrow \frac{1}{2} + 2b = 0 \rightarrow b = -\frac{1}{4} \end{array} \right.$$

$$\text{پس: } f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \Rightarrow f(2) = \frac{2}{2} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۳۳ ضابطه تابع همانی $y = x$ است، در نتیجه باید داشته باشیم:

$$\frac{3x^2 + x}{(a-1)x^2 + bx + c} = x \Rightarrow 3x^2 + x = (a-1)x^2 + bx^2 + cx$$

اگر دو چندجمله‌ای بخواهند با یکدیگر برابر باشند، باید تک تک ضرایب متغیرهای هم‌توان با هم برابر باشند. یعنی:

$$\left. \begin{array}{l} (a-1) = 0 \Rightarrow a = 1 \\ b = 3, c = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow a + b + c = 5$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۳۴

تابع ثابت $g(x) = k$ ، تابع خطی $h(x) = ax + b$ ، تابع همانی $f(x) = x$

$$2f(-2) = g(2) \Rightarrow 2(-2) = k \Rightarrow k = -4 \Rightarrow g(x) = -4$$



$$\begin{aligned} h(-2) &= g(0) + 1 \Rightarrow -2a + b = -4 + 1 \Rightarrow \begin{cases} -2a + b = -3 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = -2 \\ h(2) &= f(2) + g(3) + 1 \Rightarrow 2a + b = 2 - 4 + 1 \Rightarrow \begin{cases} -2a + b = -3 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \\ h(x) &= \frac{1}{2}x - 2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x \geq 2 \Rightarrow x \geq 4 \end{aligned}$$

۲۳۵ ضابطه تابع همانی به صورت $g(x) = x$ و ضابطه تابع ثابت به صورت $f(x) = k$ است.

چون g تابع همانی است، پس $g(-1) = -1$ و $g(2) = 2$ است، لذا داریم:

$$\frac{2f(3)}{5g(-1)} = 1 \Rightarrow \frac{2f(3)}{-5} = 1 \Rightarrow f(3) = -\frac{5}{2}$$

f تابعی ثابت است، پس $f(3) = f(2) = -\frac{5}{2}$ و لذا داریم:

$$f(2) \times g(2) = \frac{-5}{2} \times 2 = -5$$

۲۳۶ ضابطه تابع همانی $f(x) = x$ و ضابطه تابع ثابت به صورت $g(x) = k$ است.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= x \\ g(x) &= k \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(x) = k^2 - 2kx$$

$$h(3) = -8 \Rightarrow k^2 - 6k = -8 \Rightarrow k^2 - 6k + 8 = 0 \Rightarrow (k-2)(k-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k=2 \\ k=4 \end{cases}$$

$$h(2) = k^2 - 4k \xrightarrow{k=2} h(2) = -4$$

$$h(2) = k^2 - 4k \xrightarrow{k=4} h(2) = 0$$

۲۳۷ دامنه تابع $\mathbb{R} - \{-3\}$ است پس $x = -3$ تنها ریشه مخرج است و چون مخرج درجه دوم است پس حتماً مخرج به صورت $2(x+3)^2$ است.

$$2(x+3)^2 = 2x^2 + 12x + 18 = 2x^2 + cx + d \rightarrow c = 12, d = 18$$

دقت کنید که تابع $f(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{2x^2 + 12x + 18}$ قرار است یک تابع ثابت شود برای این منظور صورت کسر باید به صورت ضربی از مخرج درآید. با

مقایسه جملات اول صورت و مخرج، مشخص می شود که صورت قرار است $\frac{3}{2}$ برابر مخرج باشد پس این نسبت در بقیه جملات صورت و مخرج نیز برقرار است یعنی:

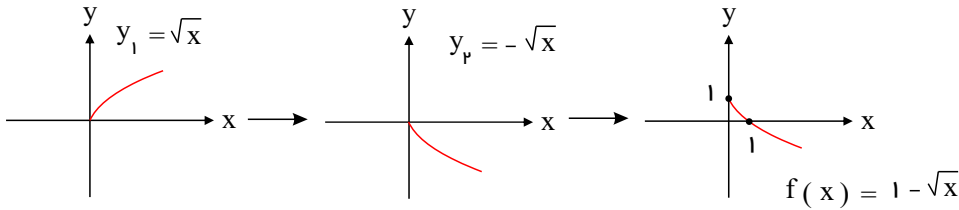
$$\begin{cases} a = \frac{3}{2}(12) = 18 \\ b = \frac{3}{2}(18) = 27 \end{cases}$$

$$\text{پس: } f(x) = \frac{3x^2 + 18x + 27}{2x^2 + 12x + 18} = \frac{\frac{3}{2}(2x^2 + 12x + 18)}{2x^2 + 12x + 18} = \frac{3}{2} = k$$

$$\text{در نتیجه: } \frac{a-b+c-d}{k} = \frac{18-27+12-18}{\frac{3}{2}} = \frac{-15}{\frac{3}{2}} = -10$$



۲۳۸ ۱ ۲ ۳ ۴ کافی است که تابع $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ را رسم کنیم.



واضح است که این تابع، نزولی و یک به یک می‌باشد (نموداری معرّف تابع یک به یک است که اگر هر خطی موازی محور طول رسم کنیم شکل را حداکثر در یک نقطه قطع کند)

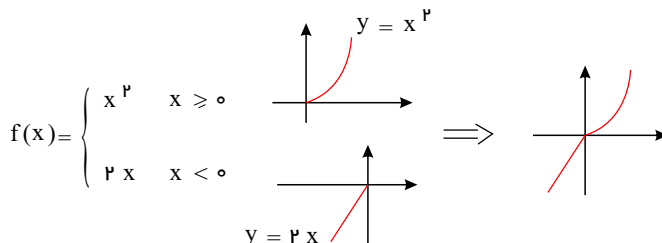
۲۳۹ ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم: در حالت کلی شرط یک به یک بودن تابع $y = f(x)$ آن است که بتوان از تساوی $f(x_1) = f(x_2)$ تساوی $x_1 = x_2$ را نتیجه گرفت. همچنین از روی نمودار، تابعی یک به یک است که هر خط موازی محور x ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

$$\begin{aligned} \text{الف) } f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + 1}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + 1}} \\ \xrightarrow{x_1, x_2 \text{ هم علامت‌اند}} &\frac{x_1^2}{x_1^2 + 1} = \frac{x_2^2}{x_2^2 + 1} \\ \Rightarrow x_1^2 x_2^2 + x_1^2 &= x_1^2 x_2^2 + x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

چون x_1 و x_2 هم علامت‌اند، تابع یک به یک است.

یک به یک نمی‌باشد. $y = 5 \Rightarrow |x| = 3 \Rightarrow x = \pm 3$ مثال نقض (ب)



(ج) باتوجه به نمودار تابع یک به یک است.

$$\text{د) } f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 1 = (x+1)^3 + 1$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1 + 1)^3 + 1 = (x_2 + 1)^3 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

تابع یک به یک است.

۲۴۰ ۱ ۲ ۳ ۴ تابع درجه‌ی ۲ برای «رأس» $x \geq (\frac{-b}{2a})$ یا $x \leq (\frac{-b}{2a})$ یک به یک است. چون در این حالت خطوط موازی محور x ها را

$$-\frac{b}{2a} = \frac{-(a+1)}{2} \geq 3 \Rightarrow a+1 \leq -6 \Rightarrow a \leq -7$$

پس $a = -7$ کم‌ترین مقدار برای a است.

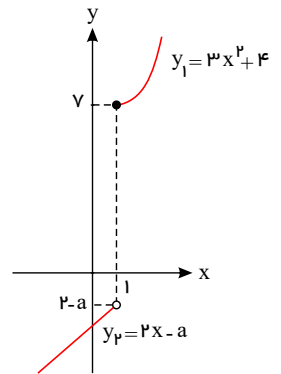
۲۴۱ ۱ ۲ ۳ ۴ شکلی معرف تابع یک به یک است که اگر هر خطی موازی محور طول رسم کنیم شکل را حداکثر در یک نقطه قطع کند و نه

بیشتر.

با توجه به شکل فرضی زیر داریم:



$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 4 & , x \geq 1 \\ 2x - a & , x < 1 \end{cases}$$



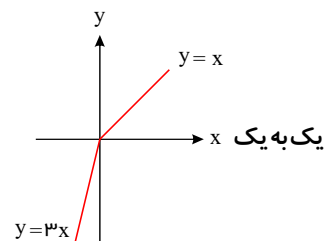
$$2 - a \leq 7 \Rightarrow a \geq -5$$

برای یک به یک بودن تابع $f(x)$ داریم:

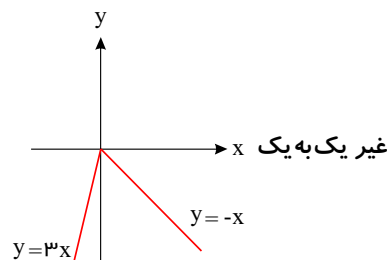
با توجه به گزینه ها $a = -4$ قابل قبول است.

۲۴۲) تابعی یک به یک است که اگر هر خطی موازی طول رسم کنیم شکل را حداکثر در یک نقطه قطع کند. ۱ ۲ ۳ ۴

$$f(x) = 2x - |x| = \begin{cases} 2x - x & ; x \geq 0 \\ 2x + x & ; x < 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ 3x & ; x < 0 \end{cases}$$



$$g(x) = x - |2x| = \begin{cases} x - 2x & ; x \geq 0 \\ x + 2x & ; x < 0 \end{cases} \rightarrow g(x) = \begin{cases} -x & ; x \geq 0 \\ 3x & ; x < 0 \end{cases}$$



۲۴۳) تابعی یک به یک است که اگر مؤلفه های دوم یکسان باشند، مؤلفه های اول نیز یکسان باشند. ۱ ۲ ۳ ۴

$$f = \{(-3, k), (\frac{a}{2}, -2), (2a+1, k), (b-1, 1), (-1, 4b)\}$$

$$(-3, k) \in f, (2a+1, k) \in f \xrightarrow{\text{یک به یک}} 2a+1 = -3 \rightarrow 2a = -4 \rightarrow a = -2$$

$$\rightarrow f = \{(-3, k), (-1, -2), (-3, k), (b-1, 1), (-1, 4b)\}$$

$$(-1, 4b) \in f, (-1, -2) \in f \xrightarrow{\text{تابع}} 4b = -2 \rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

$$\text{پس: } a - b = -2 - (-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$$

۲۴۴) می دانیم: برای این که تابع چند ضابطه ای معرف یک تابع یک به یک باشد باید اشتراک بردهای ضابطه ها تهی باشد و در صورت داشتن برد مشترک، باید بردهای مشترک از دامنه های مشترک ایجاد شوند. در این تابع چون ضابطه ها دامنه ی مشترک ندارند پس نباید بردهای مشترک داشته باشند. ۱ ۲ ۳ ۴

$$f_1(x) = \sqrt{x+2} \xrightarrow{x \geq -2} R_{f_1} = [0, +\infty)$$



$$f_p(x) = \frac{x}{p} + a \xrightarrow{x < p} R_{f_p} = (-\infty, p + a)$$

برای یک به یک بودن

$$\longrightarrow (-\infty, p + a) \cap [p, +\infty) = \emptyset \Rightarrow p + a \leq p \Rightarrow a \leq 0 \rightarrow \max(a) = 0$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۴۵

$$f = \{(-1, 0), (0, 1), (1, -1), (2, 2)\}$$

تابع f تابعی یک به یک است، پس از $f(u) = f(v)$ می توان نتیجه گرفت $u = v$ ، حال داریم:

$$f(1 - f(x_0)) = f(x_0) \Rightarrow 1 - f(x_0) = x_0 \Rightarrow f(x_0) = 1 - x_0$$

فقط زوج مرتب $(0, 1)$ در رابطه فوق صدق می کند.

$$x_0 = 0 \Rightarrow f(0) = 1 - 0 \Rightarrow f(0) = 1$$

۲۴۶ ۱ ۲ ۳ ۴ توجه: برای این که یک زوج مرتب معرف یک تابع یک به یک باشد ابتدا باید تابع باشد یعنی مؤلفه ی اول یکسان نداشته

باشد و در صورت وجود مؤلفه ی اول باید مؤلفه ی دوم هم برابر باشد و سپس باید یک به یک باشد یعنی مؤلفه ی دوم یکسان نداشته باشد و در صورت وجود مؤلفه ی دوم برابر، باید مؤلفه ی اول هم برابر باشد. بنابراین ابتدا شرط تابع بودن را بررسی می کنیم:

$$f \Rightarrow fm = 4 \Rightarrow m = 1 \rightarrow f = \{(-1, 4), (2, 3), (2, n-1), (5, 6), (p, n+2)\}$$

برای تابع بودن باید مؤلفه ی اول یکسان نداشته باشد.

$$f \Rightarrow n - 1 = 3 \Rightarrow n = 4 \Rightarrow f = \{(-1, 4), (2, 3), (5, 6), (p, 6)\}$$

برای یک به یک بودن:

$$f \Rightarrow p = 5 \Rightarrow m + n + p = 10$$

۲۴۷ ۱ ۲ ۳ ۴ می دانیم: $f(x)$ یک به یک است $x_1 = x_p \Rightarrow f(x_1) = f(x_p)$ اگربا توجه به این که تابع f یک به یک می باشد، داریم:

$$x + 2f(x) = 5x + 2 \Rightarrow 2f(x) = 5x + 2 - x \Rightarrow 2f(x) = 4x + 2$$

$$\Rightarrow 2f(x) = 2(2x + 1) \Rightarrow f(x) = 2x + 1$$

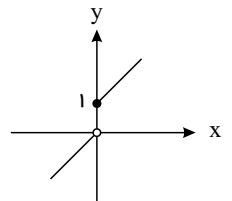
$$\Rightarrow fof(x) = f(f(x)) = 2f(x) + 1 = 2(2x + 1) + 1 = 4x + 3$$

نقطه تلاقی با محور

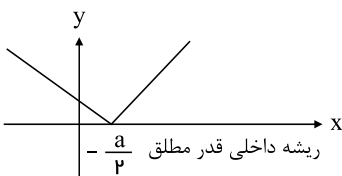
$$\longrightarrow x = 0 \Rightarrow fof(0) = 4(0) + 3 = 3$$

۲۴۸ ۱ ۲ ۳ ۴ نمودار تابع f برای اینکه یک به یک باشد باید بطور تقریبی به صورت مقابل باشد. یعنی باید شیب قست های $x < 0$ و $x \geq 0$ هر دو به طور همزمان مثبت باشد. پس داریم:

$$\begin{cases} 2 - a > 0 \Rightarrow a < 2 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < a < 2$$



تنها گزینه یک در عبارت بالا صدق می کند پس گزینه ۱ صحیح است.

۲۴۹ ۱ ۲ ۳ ۴ می دانیم که در نمودار تابع $f(x) = |mx + n|$ نقطه شکستگی نمودار تابع، ریشه داخلی قدر مطلق است، پس:حال برای این که f تابعی یک به یک باشد، باید ریشه داخلی قدر مطلق در فاصله $(-1, 2)$ نباشد. پس ابتدا حدود a را طوری می یابیم که ریشه در فاصله $(-1, 2)$ باشد. سپس مجموعه جواب به دست آمده را از $\mathbb{R}$ کم می کنیم:



$$2x + a = 0 \Rightarrow x = -\frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow -1 < -\frac{a}{2} < 2 \xrightarrow{\times(-2)} -4 < a < 2$$

پس مجموعه جواب مورد نظر برابر است با:

$$a \in \mathbb{R} - (-4, 2)$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۵۰

$$\text{شرط تابع بودن} \rightarrow (4, 2), (4, a^2 - a) \Rightarrow a^2 - a = 2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (a - 2)(a + 1) = 0 \Rightarrow a = 2, a = -1$$

$$a = -1 \Rightarrow f = \{(4, 2), (-1, 5), (b, 2), (-1, 4)\} \Rightarrow (-1, 5) \in f, (-1, 4) \in f$$

f تابع نمی باشد پس $a = -1$ غیر قابل قبول است.

$$a = 2 \Rightarrow f = \{(4, 2), (2, 5), (b, 2), (-1, 4)\}$$

$$\text{شرط یک به یک بودن} \Rightarrow (4, 2), (b, 2) \Rightarrow b = 4 \Rightarrow (a, b) = (2, 4)$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۵۱
یک تابع چند ضابطه ای در صورتی یک به یک است که اولاً هر دو ضابطه آن یک به یک باشند ثانیاً اشتراک بردهای هر دو ضابطه تهی باشد.

هر دو ضابطه تابع f یک به یک است، در نتیجه f وقتی یک به یک می باشد که اشتراک بردهای دو ضابطه تهی باشد.

$$x \leq -1 \Rightarrow 3x \leq -3 \Rightarrow 3x - 4 \leq -7 \Rightarrow y_1 \leq -7$$

$$x > -1 \Rightarrow -x < 1 \Rightarrow -x + m < m + 1 \Rightarrow y_2 < m + 1$$

m هر عددی و در هر محدوده ای که باشد، دو بُرد بالا اشتراک پیدا می کنند. پس به ازای هیچ مقداری از m تابع یک به یک نمی شود.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۵۲
با در نظر گرفتن شرط یک به یک بودن تابع داریم:

$$(1, -2) = (a + 1, -2) \Rightarrow a + 1 = 1 \Rightarrow a = 0$$

$$\Rightarrow f = \{(1, -2), (2, 4), (6, 0), (b + 2, 0), (c, b)\}$$

$$(6, 0) = (b + 2, 0) \Rightarrow b + 2 = 6 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow f = \{(1, -2), (2, 4), (6, 0), (c, 4)\}$$

$$(2, 4) = (c, 4) \Rightarrow c = 2 \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{4}{2} = 2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۵۳

$$f = \{(3, 2), (a, 5), (3, a^2 - a), (b, 2), (-1, 4)\}$$

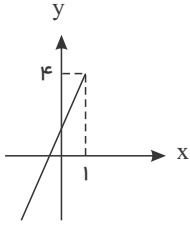
$$\text{شرط تابع بودن} \rightarrow (3, 2), (3, a^2 - a) \Rightarrow a^2 - a = 2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow (a - 2)(a + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases}$$

$$a = -1 \Rightarrow f = \{(3, 2), (-1, 5), (b, 2), (-1, 4)\} \Rightarrow \text{تابع نیست.}$$

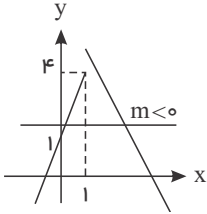
$$a = 2 \Rightarrow f = \{(3, 2), (2, 5), (b, 2), (-1, 4)\} \quad \text{شرط یک به یک بودن} \rightarrow (3, 2), (b, 2) \Rightarrow b = 3$$

$$g(x) = ax + b \xrightarrow[a=2]{b=3} g(x) = 2x + 3 \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

محل برخورد تابع g با محور طول ها نقطه $(-\frac{3}{2}, 0)$ می باشد.

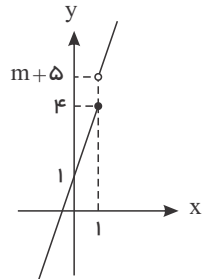


نمودار قسمت اول تابع $(x \leq 1)$ به صورت روبه‌رو است. با توجه به این که قسمت دوم تابع نیز به صورت یک خط راست با شیب m می‌باشد، واضح است که m نباید منفی شود، زیرا اگر m منفی باشد، حالتی مانند نمودار دوم رخ می‌دهد که در این صورت می‌توان خطی موازی محور x ‌ها یافت که نمودار تابع را در دو نقطه قطع کند. (رد گزینه‌های «۱»، «۳» و «۴») همچنین m نباید برابر با صفر شود زیرا در این صورت تابع ثابت خواهد شد و یک‌به‌یک نمی‌شود.

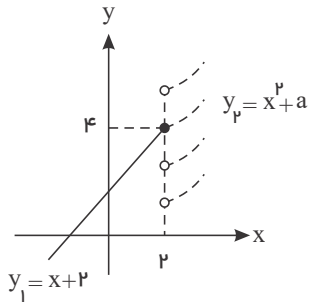


با شرط $m > 0$ ، نمودار تابع به صورت زیر می‌شود. برای آن که این نمودار مربوط به یک تابع یک‌به‌یک باشد، باید شرط $m + 5 \geq 4$ برقرار باشد که در نتیجه:

$$\begin{cases} m + 5 \geq 4 \Rightarrow m \geq -1 \\ m > 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} m > 0$$



۲۵۵ ۱ ۲ ۳ ۴ شکلی معرف تابع یک به یک است که اگر هر خطی به موازات محور x ‌ها رسم کنیم شکل را حداکثر در یک نقطه قطع کند. نمودار تابع f به ازای مقادیر مختلف a به صورت زیر است.



با توجه به نمودار برای این که تابع یک به یک نباشد، باید:

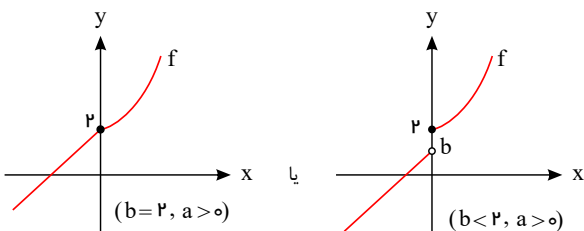
$$2^2 + a < 4 \Rightarrow a < 0$$

برای آن که تابع $f(x)$ ، یک‌به‌یک باشد، باید:

(۱) شیب خط $ax + b$ باید مثبت باشد. ($a > 0$)

(۲) عرض از مبدأ خط باید کوچک‌تر یا مساوی ۲ باشد. ($b \leq 2$)

با توجه به شرایط فوق، نمودار $f(x)$ به یکی از حالت‌های زیر می‌تواند باشد:



۲۵۷ ۱ ۲ ۳ ۴ می‌دانیم اگر $f(a) = b$ باشد آن‌گاه $f^{-1}(b) = a$ است.



$$f^{-1}(g(2a)) = 6 \rightarrow f(6) = g(2a) \rightarrow 3 = \frac{2a}{2a-1} \rightarrow 6a-3=2a \rightarrow 4a=3 \rightarrow a = \frac{3}{4}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۵۸

$$2f = \{(1, 10), (2, 0), (3, 8), (4, 12)\} \quad , \quad g^{-1} = \{(4, -1), (1, 2), (3, 0)\}$$

$$D_{2f} \cap D_{g^{-1}} = \{1, 3, 4\}$$

$$\frac{2f}{g^{-1}} = \{(1, \frac{10}{2}), (3, \frac{8}{0}), (4, \frac{12}{-1})\} \rightarrow \frac{2f}{g^{-1}} = \{(1, 5), (4, -12)\}$$

$$\frac{2f}{g^{-1}} = 5 \times (-12) = -60$$

۲۵۹ در تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ اگر $a+d=0$ باشد آن گاه تابع f ، وارون خود است. به عبارت دیگر $f^{-1}(x) = f(x)$ در نتیجه در این جا باید:

$$3 + (-a) + 0 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow f(x) = \frac{3x-1}{x-3} \Rightarrow f(1) = \frac{2}{-2} = -1$$

۲۶۰ دو تابع f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ متقارن هستند و می دانیم برای پیدا کردن ضابطه ای معکوس یک تابع، ابتدا رابطه را بر حسب x بدست می آوریم و سپس جای x و y را عوض می کنیم.

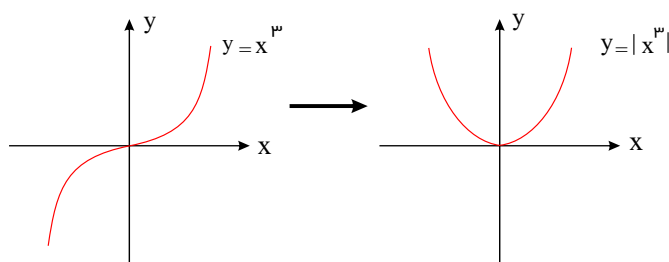
$$3y - 2x = 4 \rightarrow 2x = 3y - 4 \rightarrow x = \frac{3}{2}y - 2 \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3}{2}x - 2 \xrightarrow{x=0} -2 = \text{عرض از مبدأ}$$

۲۶۱ چون نمودار تابع معکوس از نقطه $\left(\frac{m}{m+2}, m\right)$ می گذرد بنابراین خود تابع از نقطه $\left(m, \frac{m}{m+2}\right)$ عبور می کند.

$$\left(\frac{a}{b} \in f \rightarrow \frac{b}{a} \in f^{-1}\right)$$

$$\frac{m}{m+2} \xrightarrow{\text{صدق در تابع}} m+2 = \frac{m-4}{2m-1} \rightarrow 2m^2 - m + 4m - 2 = m - 4 \rightarrow 2m^2 + 3m - 2 = 0 \rightarrow m^2 + m + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0 \rightarrow \text{معادله ریشه ی حقیقی ندارد.}$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۲۶۲

این تابع، غیر یک به یک و در نتیجه وارون ناپذیر است.

۲۶۳ می دانیم اگر $f(a) = b$ باشد آن گاه $f^{-1}(b) = a$ است.

$$g^{-1} \circ f^{-1}(a) = 8 \rightarrow g^{-1}(f^{-1}(a)) = 8 \rightarrow f^{-1}(a) = g(8) \rightarrow f^{-1}(a) = \sqrt{5(8)+9} = \sqrt{49} = 7$$

$$\rightarrow f^{-1}(a) = 7 \rightarrow f(7) = a \rightarrow a = 3$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۶۴

$$g = \{(-2, 0), (0, 3), (1, -1), (3, -2)\} \rightarrow g^{-1} = \{(0, -2), (3, 0), (-1, 1), (-2, 3)\}$$

$$\text{پس } (f \circ g^{-1})(-2) = f(g^{-1}(-2)) = f(3) = 9 - \sqrt{9} = 9 - 3 = 6$$

۲۶۵ می دانیم که $D_{f^{-1} \circ f} = D_f$ است پس تعداد اعداد صحیح در این بازه برابر با ۳ است. یعنی اعداد: $(-1, 0, 1)$.

۲۶۶ عرض از مبدأ تابع f^{-1} برابر (-1) است. یعنی $(0, -1) \in f^{-1}$ و در نتیجه $(-1, 0) \in f$. پس با توجه به



$$f(-1) = 0 \Rightarrow -1 - a + 2a = 0 \Rightarrow a = 1$$

۲۶۷) ۱ ۲ ۳ ۴ برای به دست آوردن f^{-1} باید جای زوج‌های مرتب f را عوض کنیم:

$$f = \{(-1, 0), (1, 2), (0, 1), (2, -1)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(0, -1), (2, 1), (1, 0), (-1, 2)\}$$

$$f + f^{-1} = \{(-1, 0 + 2), (2, 1 + (-1)), (1, 0 + 2), (0, -1 + 1)\} = \{(-1, 2), (2, 0), (1, 2), (0, 0)\}$$

۲۶۸) ۱ ۲ ۳ ۴ در تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ اگر f و f^{-1} بر هم منطبق باشند آن‌گاه $a+d=0$ است. پس:

$$2 + a = 0 \rightarrow a = -2$$

۲۶۹) ۱ ۲ ۳ ۴ می‌دانیم اگر $\frac{a}{b} \in f$ باشد آن‌گاه $\frac{a}{b} \in f^{-1}$ است $(f(a) = b \rightarrow f^{-1}(b) = a)$ چون $\frac{1}{3} \in g$ است پس

$$\frac{3}{1} \in g^{-1} \text{ است.}$$

$$f^{-1}(2g^{-1}(3)) = f^{-1}(2(1)) = f^{-1}(2) = \sqrt{2+7} = \sqrt{9} = 3$$

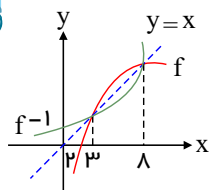
۲۷۰) ۱ ۲ ۳ ۴ می‌دانیم اگر $f(a) = b$ باشد آن‌گاه $f^{-1}(b) = a$ است.

$$(f^{-1} \circ g)(1) = f^{-1}(g(1)) = f^{-1}(2) = 0$$

توجه کنید $f(0) = 2$ است پس $f^{-1}(2) = 0$ است.

۲۷۱) ۱ ۲ ۳ ۴ برای به دست آوردن دامنه‌ی تعریف توابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج، کافی است زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهیم.

$$x - f^{-1}(x) \geq 0 \rightarrow x \geq f^{-1}(x)$$



نمودارهای f و f^{-1} نسبت به نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم متقارن هستند و با توجه به $x \geq f^{-1}(x)$ باید به دنبال فواصلی باشیم که خط $y = x$ بزرگ‌تر مساوی تابع f^{-1} باشد یعنی $[3, 8]$.

۲۷۲) ۱ ۲ ۳ ۴

$$(f \circ g^{-1})(4) = f(g^{-1}(4))$$

اکنون باید $g^{-1}(4)$ را حساب کنیم برای این منظور کافی است در تابع g به جای y عدد ۴ قرار دهیم.

$$4 = \frac{5x+2}{2x-1} \rightarrow 8x-4 = 5x+2 \rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = 2$$

$$\text{بنابراین } f(g^{-1}(4)) = f(2) = 2^2 + 2 = 6$$

۲۷۳) ۱ ۲ ۳ ۴

$$f(x) = \sqrt{1-x} \Rightarrow D_f: 1-x \geq 0 \rightarrow x \leq 1$$

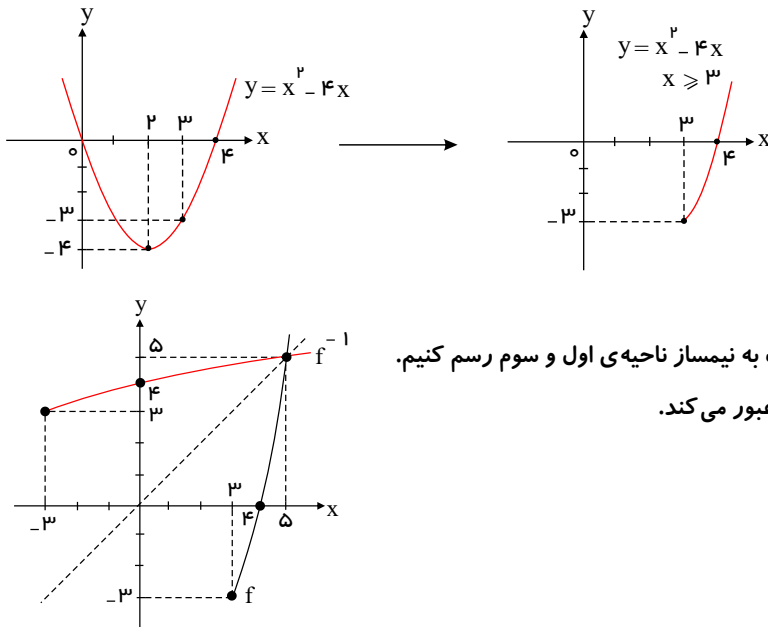
$$\text{از طرفی می‌دانیم } f^{-1} \circ f(x) = x, \quad x \in D_f(x \leq 1)$$

برای محاسبه‌ی دامنه‌ی تعریف، کافی است زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهیم.

$$1 + f^{-1} \circ f(x) \geq 0 \rightarrow 1 + x \geq 0 \rightarrow x \geq -1 \xrightarrow{x \leq 1} -1 \leq x \leq 1 \quad \text{یا } x \in [-1, 1]$$

۲۷۴) ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا نمودار تابع $f(x) = x^2 - 4x$ را رسم می‌کنیم.

$$S \left| \begin{array}{c} -b \\ 2a \\ \frac{rac-b^2}{4a} \end{array} \right| \rightarrow S \left| \begin{array}{c} 2 \\ -4 \end{array} \right|, \quad y=0 \rightarrow x(x-4)=0 \rightarrow \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{c} 4 \\ 0 \end{array} \right|$$



برای رسم نمودار تابع معکوس، کافی است که قرینه‌ی شکل را نسبت به نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم رسم کنیم. واضح است که نمودار f^{-1} از نواحی اول و دوم محورهای مختصات عبور می‌کند.

۲۷۵ (۱ ۲ ۳ ۴) ماشین فوق، رابطه‌ی بین f و g را به صورت $g(f(x)) = x$ بیان می‌کند. به عبارتی، با توجه به یک به یک بودن f ، g ، توابع f ، g وارون یکدیگرند، یعنی برای توابع f ، g (که مسلماً یک به یک هستند) طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} g(m) = 2 \\ g(f(2)) = 2 \end{cases} \Rightarrow m = f(2) = \frac{2 \times 2 - 1}{2 + 1} = \frac{3}{3} = 1$$

۲۷۶ (۱ ۲ ۳ ۴)

$$f^{-1} = \{(2, 1), (3, -2), (4, -1)\} \Rightarrow f = \{(1, 2), (-2, 3), (-1, 4)\}$$

برای یافتن دامنه‌ی تابع $f - 2g$ باید اشتراک دامنه‌ی توابع f و g را به دست آوریم.

$$D_f = \{1, -2, -1\}, \quad D_{f-2g} = \{-2, -1\} \Rightarrow \{1, -2, -1\} \cap D_g = \{-2, -1\}$$

با توجه به رابطه‌ی بالا، قطعاً -2 و -1 در دامنه‌ی تابع g حضور دارند پس داریم:

$$f - 2g = \{(-2, -1)(-1, 8)\} \Rightarrow (f - 2g)(-2) = -1 \Rightarrow f(-2) - 2g(-2) = -1$$

$$\Rightarrow 3 - 2g(-2) = -1 \Rightarrow g(-2) = 2 \Rightarrow (-2, 2) \in g \Rightarrow (2, -2) \in g^{-1}$$

$$(f - 2g)(-1) = 8 \Rightarrow f(-1) - 2g(-1) = 8 \Rightarrow 4 - 2g(-1) = 8 \Rightarrow g(-1) = -2$$

$$\Rightarrow (-1, -2) \in g \Rightarrow (-2, -1) \in g^{-1}$$

۲۷۷ (۱ ۲ ۳ ۴)

برای پیدا کردن ضابطه‌ی تابع وارون ابتدا x را برحسب y به دست می‌آوریم و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

$$f(x) = y = x + \sqrt{x} = (\sqrt{x} + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{4y+1}{4} = (\sqrt{x} + \frac{1}{2})^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{4y+1}}{2} \Rightarrow x = \left(\frac{\sqrt{4y+1}-1}{2}\right)^2$$

$$\xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را عوض می‌کنیم}} y = \left(\frac{\sqrt{4x+1}-1}{2}\right)^2 = f^{-1}(x) \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = 2$$

۲۷۸ (۱ ۲ ۳ ۴) وقتی $2 < x < 3$ باشد $-3 < -x < -2$ است و $[x] = 2$ و $[-x] = -3$ است پس $f(x) = -3x + 2$ است.

برای محاسبه‌ی $f^{-1}(-5)$ کافی است که $f(x)$ را مساوی -5 قرار دهید: $\left(\left|\frac{a}{b}\right| \in f \rightarrow \left|\frac{b}{a}\right| \in f^{-1}\right)$

$$-3x + 2 = -5 \rightarrow -3x = -7 \rightarrow x = \frac{7}{3} \Rightarrow f\left(\frac{7}{3}\right) = -5 \rightarrow f^{-1}(-5) = \frac{7}{3}$$

اگر مقدار x بین 2 و 3 نمی‌شد گزینه‌ی سوم یعنی ناموجود را انتخاب می‌کردیم.



اگر $f(a) = b$ باشد، آن گاه $f^{-1}(b) = a$ است.

$$(f^{-1} \circ g)(a) = f^{-1}(g(a)) \xrightarrow{f^{-1}(g(a))=1} (f^{-1} \circ g)(a) = 1 \Rightarrow f^{-1}(g(a)) = 1 \Rightarrow f(1) = g(a)$$

$$f(1) = 3 \Rightarrow g(a) = 3 \Rightarrow 1 + \frac{1}{2}\sqrt{a-1} = 3 \Rightarrow \sqrt{a-1} = 4 \Rightarrow a-1 = 16 \Rightarrow a = 17$$

۲۸۰ ۱ ۲ ۳ ۴ می‌دانیم اگر $f(a) = b$ باشد آن گاه $f^{-1}(b) = a$ است.

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(8) = g^{-1}(f^{-1}(8))$$

برای محاسبه $f^{-1}(8)$ بدین صورت عمل می‌کنیم:

$$8 = \frac{2}{5}x - 4 \rightarrow \frac{2}{5}x = 12 \rightarrow 2x = 60 \rightarrow x = 30$$

$$\text{پس } g^{-1}(f^{-1}(8)) = g^{-1}(30)$$

برای محاسبه $g^{-1}(30)$ بدین صورت عمل می‌نماییم.

$$30 = x^3 + x \rightarrow x = 3$$

۲۸۱ ۱ ۲ ۳ ۴ روش اول: برای پیدا کردن ضابطه‌ی وارون یک تابع، کافی است x را بر حسب y بدست آورده و سپس جای x و y را عوض کنیم.

$$y = \sqrt{x}, x \geq 0 \rightarrow y^2 = x \rightarrow f^{-1}(x) = x^2, x \geq 0 \rightarrow f^{-1}(x) = x|x|$$

$$y = -\sqrt{-x}, x < 0 \rightarrow y^2 = -x \rightarrow x = -y^2 \rightarrow f^{-1}(x) = -x^2, x < 0$$

روش دوم: تست را به روش عددگذاری حل می‌کنیم و می‌دانیم اگر $f(a) = b$ باشد آن گاه $f^{-1}(b) = a$ است.

$$x = 4 \xrightarrow{\text{تابع}} y = 2 \rightarrow A \begin{vmatrix} 4 \\ 2 \end{vmatrix} \in f \rightarrow A' \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \end{vmatrix} \in f^{-1} \rightarrow \text{گزینه‌های اول و چهارم حذف می‌شوند.}$$

$$x = -4 \xrightarrow{\text{تابع}} y = -2 \rightarrow B \begin{vmatrix} -4 \\ -2 \end{vmatrix} \in f \rightarrow B' \begin{vmatrix} -2 \\ -4 \end{vmatrix} \in f^{-1} \rightarrow \text{گزینه‌ی دوم حذف می‌شود.}$$

$$(a, b) \in f \rightarrow (b, a) \in f^{-1} \quad \text{۲۸۲ ۱ ۲ ۳ ۴ می‌دانیم:}$$

ابتدا تابع f^{-1} را می‌نویسیم:

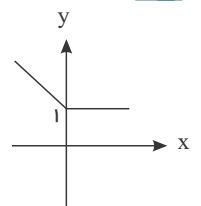
$$f = \{(2, 3), (-1, 2), (-4, 1), (3, 0)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(3, 2), (2, -1), (1, -4), (0, 3)\}$$

$$f^{-1}(3) = 2 \Rightarrow (g \circ f^{-1})(3) = g(f^{-1}(3)) = g(2) = -4$$

$$\text{پس } (f \circ g \circ f^{-1})(3) = f(g \circ f^{-1}(3)) = f(-4) = 1$$

۲۸۳ ۱ ۲ ۳ ۴ شرط آن که تابع وارون پذیر باشد آن است که یک به یک باشد، برای بررسی یک به یک بودن نمودار توابع را رسم می‌کنیم:

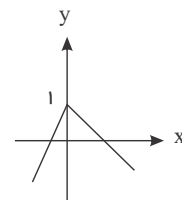
$$\text{گزینه «۱» : } y = |x| + 1 - x = \begin{cases} 1 & ; x \geq 0 \\ -2x + 1 & ; x < 0 \end{cases}$$



یک به یک نیست.

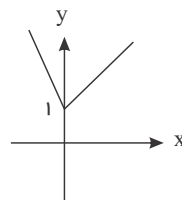


$$y = 1 - 3|x| + x = \begin{cases} -2x + 1 & ; x \geq 0 \\ 4x + 1 & ; x < 0 \end{cases}$$



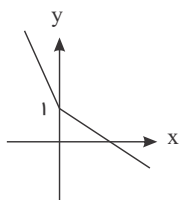
یک به یک نیست.

$$y = 1 + 3|x| - x = \begin{cases} 2x + 1 & ; x \geq 0 \\ -4x + 1 & ; x < 0 \end{cases}$$



یک به یک نیست.

$$y = 1 - 3x + |x| = \begin{cases} -2x + 1 & ; x \geq 0 \\ -4x + 1 & ; x < 0 \end{cases}$$



یک به یک است، وارون پذیر است.

۲۸۴ طبق نمودار داریم:

$$x = -2 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow -3 = f(-2 + 2) = f(0) \Rightarrow f^{-1}(-3) = 0$$

$$x = -1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = f(-1 + 2) = f(1) \Rightarrow f^{-1}(0) = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow 2 = f(2 + 2) = f(4) \Rightarrow f^{-1}(2) = 4$$

در نتیجه:

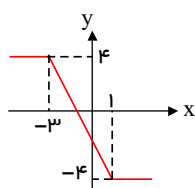
$$A = \frac{f^{-1}(0) + f^{-1}(2)}{1 + f^{-1}(-3)} = \frac{1 + 4}{1 + 0} = 5$$

۲۸۵ ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا داخل قدرمطلق ها را تعیین علامت می کنیم.

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$x - 1$		$-$	$-$	$+$
$x + 3$		$-$	$+$	$+$

$$y = |x - 1| - |x + 3| = \begin{cases} -x + 1 + x + 3 & x < -3 \\ -x + 1 - x - 3 & -3 \leq x \leq 1 \\ x - 1 - x - 3 & x > 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 4 & x < -3 \\ -2x - 2 & -3 \leq x \leq 1 \\ -4 & x > 1 \end{cases}$$



پس نمودار تابع به صورت زیر است:

باتوجه به نمودار، تابع در فاصله $[-3, 1]$ یک به یک و معکوس پذیر است.

۲۸۶ ۱ ۲ ۳ ۴

$$(g \circ f^{-1})(-3) = g(f^{-1}(-3))$$



ابتدا باید $f^{-1}(-3)$ را به دست آوریم. برای این منظور کافی است در تابع اصلی به جای y ، عدد -3 را قرار دهیم.

$$\left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \in f \rightarrow \begin{array}{c} b \\ a \end{array} \in f^{-1} \right)$$

$$-3 = \frac{2x+3}{1-2x} \rightarrow -3 + 6x = 2x + 3 \rightarrow 4x = 6 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

بنابراین $f^{-1}(-3) = \frac{3}{2}$ است.

$$g(f^{-1}(-3)) = g\left(\frac{3}{2}\right) = 6\left(\frac{9}{4}\right) - \frac{3}{2} - 2 = \frac{27}{2} - \frac{3}{2} - 2 = 12 - 2 = 10$$

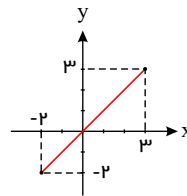
۲۸۷ اگر (m, n) نقطه‌ی تقاطع نمودارهای دو تابع f و f^{-1} باشد. داریم: $f(n) = m, f(m) = n$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} f(-1) = \frac{1}{3} \Rightarrow 1 - a + b = \frac{1}{3} \\ f\left(\frac{1}{3}\right) = -1 \Rightarrow \frac{-1}{3} + \frac{a}{3} + b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + b = -\frac{2}{3} \\ a + 3b = -\frac{26}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{9} \\ b = -\frac{8}{9} \end{cases} \Rightarrow a + b = -\frac{10}{9}$$

۲۸۸ ۱ ۲ ۳ ۴

$$R_{f^{-1}} = [-2, 3] \Rightarrow D_f = [-2, 3]$$

باتوجه به نمودار f^{-1} داریم:



$$y = (f^{-1} \circ f)(x) = x, x \in D_f \Rightarrow y = x, x \in [-2, 3] \Rightarrow$$

۲۸۹ ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا دامنه‌ی تابع $f \circ g$ و سپس ضابطه‌ی آن را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sqrt{x-1} \xrightarrow{x-1 \geq 0} D_g = \{x | x \geq 1\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{x \geq 1 | \sqrt{x-1} \in \mathbb{R}\} \Rightarrow D_{f \circ g} = \{x | x \geq 1\}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x-1})^2 + 1 = x - 1 + 1 = x$$

همان‌طور که به خاطر دارید تابع $y = x$ یک تابع همانی است و دامنه و برد آن یکسان است، پس:

$$R_{f \circ g} = \{y | y \geq 1\}$$

می‌دانیم که تابع $y = x$ جزء توابعی است که وارون آن با خود آن برابر است، بنابراین:

$$(f \circ g)(x) = x \Rightarrow (f \circ g)^{-1}(x) = x$$

$$D_{(f \circ g)^{-1}(x)} = R_{(f \circ g)(x)} = \{x | x \geq 1\}$$

۲۹۰ ۱ ۲ ۳ ۴ f باید یک به یک باشد، پس مؤلفه‌های اول دو زوج مرتب $(\frac{4}{k}, 2)$ و $(k+3, 2)$ با هم برابرند.

$$k+3 = \frac{4}{k} \Rightarrow k^2 + 3k - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = -4 \end{cases}$$

اگر $k = 1$ باشد، f یک به یک نمی‌شود.

$$f = \{(4, 2), (1, 4), (3, 4)\}$$

اگر $k = -4$ باشد، f یک به یک و در نتیجه وارون‌پذیر است:

$$f = \{(-1, 2), (1, 4), (3, -1)\}$$

پس $k = -4$ است. حالا مقدار $(f - g)(-k - 1)$ را حساب می‌کنیم:

$$(f - g)(3) = f(3) - g(3) = -1 - \left[\frac{3}{2} - 2\right] = -1 - (-1) = 0$$



۲۹۱) ۱ ۲ ۳ ۴ می‌دانیم اگر $\left| \frac{a}{b} \in f \right|$ باشد آن گاه $\left| \frac{b}{a} \in f^{-1} \right|$ است. برای محاسبه‌ی $f(g^{-1}(\frac{-1}{9}))$ ابتدا مقدار $g^{-1}(\frac{-1}{9})$ را می‌یابیم و برای این کار کافی است که معادله‌ی $g(x) = \frac{-1}{9}$ را حل کنیم.

$$\frac{2x-1}{3x+2} = \frac{-1}{9} \rightarrow 18x-9 = -3x-2 \rightarrow 21x = 7 \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$\text{پس: } f(g^{-1}(\frac{-1}{9})) = f(\frac{1}{3}) = 3(\frac{1}{3})^2 - 4(\frac{1}{3}) + 1 = \frac{1}{3} - \frac{4}{3} + 1 = 0$$

۲۹۲) ۱ ۲ ۳ ۴ توجه کنید اگر $x = -3$ باشد $g(-3) = f(-1)$ است.

$$f^{-1}(g^{-1}(f(-1))) = f^{-1}(g^{-1}(g(-3))) = f^{-1}(-3) = \frac{(-3)^3}{9} + \sqrt[3]{-27}$$

$$= -3 - 3 = -6$$

توجه کنید اگر $x \in D_g$ باشد آن گاه $g^{-1}(g(x)) = x$ است به همین علت $g^{-1}(g(-3)) = -3$ است.

۲۹۳) ۱ ۲ ۳ ۴ برد وارون تابع $g(x) = \sqrt{f(x)}$ همان دامنه‌ی تابع g می‌باشد، پس داریم:

$$g(x) = \sqrt{f(x)} \Rightarrow f(x) \geq 0 \xrightarrow{\text{باتوجه به نمودار } f} x \geq -2 \Rightarrow R_{g^{-1}} = [-2, +\infty)$$

در بین گزینه‌ها فقط گزینه‌ی ۴ یعنی بازه $(-3, -2)$ در برد تابع g^{-1} قرار ندارد.

۲۹۴) ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم اگر $f(a) = b$ باشد، آن گاه $f^{-1}(b) = a$ است.

$$\left| \begin{array}{l} 8 \\ 6 \end{array} \right| \xrightarrow{f(x) = -2x+b} 6 = -16 + b \rightarrow b = 22 \rightarrow f(x) = -2x + 22$$

$$y = -2x + 22 \rightarrow 2x = -y + 22 \rightarrow x = -\frac{1}{2}y + 11 \rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + 11$$

$$f^{-1}(x) = g(x) \rightarrow -\frac{x}{2} + 11 = -1,5x + 6 \rightarrow 1,5x - 0,5x = 6 - 11 \rightarrow x = -5$$

۲۹۵) ۱ ۲ ۳ ۴ کافی است ضابطه‌ی معکوس تابع داده‌شده را به دست آورید. برای این کار x را بر حسب y به دست آورده و سپس جای x و y را عوض کنید.

$$y = \log_r^{x+a} + b \rightarrow y - b = \log_r^{x+a} \xrightarrow{\log_b^a = c \rightarrow b^c = a} x + a = r^{y-b}$$

$$\rightarrow x = r^{y-b} - a \rightarrow f^{-1}(x) = r^{x-b} - a$$

شکل داده‌شده مربوط به $y = 2^{x+1} + 1$ است بنابراین $a = b = -1$ و در نتیجه $a + b = -2$ است.

۲۹۶) ۱ ۲ ۳ ۴

$$(-1, 2) \in (gof)^{-1} \Rightarrow (2, -1) \in gof$$

$$gof(2) = -1 \Rightarrow g(f(2)) = -1 \Rightarrow g(a+1) = -1 (*)$$

$$g(2a-1) = -1 \xrightarrow{(*)} a+1 = 2a-1 \Rightarrow a = 2$$

۲۹۷) ۱ ۲ ۳ ۴

$$f(x) = x + 2 = y \Rightarrow x = y - 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = x - 2$$

$$g(f^{-1}(x)) = 0 \Rightarrow g(x-2) = 0 \Rightarrow 2(x-2)^2 - 8(x-2) + 1 = 0$$



$$\Rightarrow 2(x^2 - 4x + 4) - 8x + 16 + 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 16x + 25 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 8$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۹۸

برای به دست آوردن ضابطه‌ی معکوس یک تابع، x را بر حسب y به دست می‌آوریم و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

$$y = 1 + \sqrt{1-x} \rightarrow \sqrt{1-x} = y-1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 1-x = (y-1)^2$$

$$\rightarrow x = 1 - (y-1)^2 \rightarrow f^{-1}(x) = 1 - (x-1)^2 = 1 - x^2 - 1 + 2x \rightarrow f^{-1}(x) = 2x - x^2$$

می‌دانیم $D_{f^{-1}} = R_f$ پس کافی است برد (حدود y) تابع f را به دست آوریم.

$$y = 1 + \sqrt{1-x} \rightarrow \underbrace{\sqrt{1-x}}_{\text{بزرگتر مساوی صفر}} = y-1 \rightarrow y-1 \geq 0 \rightarrow y \geq 1 \rightarrow D_{f^{-1}} = x \geq 1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۹۹ تابع خطی به صورت $f(x) = ax + b$ است. می‌دانیم اگر نقطه‌ی $\left| \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right.$ نقطه‌ی تلاقی دو تابع f و f^{-1} باشد

$f(m) = n$ و $f(n) = m$ است و چون محل تلاقی دو تابع f و f^{-1} نقطه‌ی $\left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right.$ است داریم:

$$\left. \begin{aligned} f(1) = 0 &\rightarrow a + b = 0 \xrightarrow{b=1} a = -1 \\ f(0) = 1 &\rightarrow b = 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow f(x) = -x + 1$$

حال برای محاسبه‌ی $f^{-1}(2)$ کافی است در تابع اصلی به جای y عدد ۲ قرار دهید.

$$2 = -x + 1 \rightarrow x = 1 - 2 = -1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۰۰ می‌دانیم اگر $f(a) = b$ باشد آنگاه $f^{-1}(b) = a$ است.

$$f(g^{-1}(a)) = 1 \rightarrow f^{-1}(1) = g^{-1}(a) \rightarrow \frac{1+1}{1-2} = g^{-1}(a)$$

$$\rightarrow g^{-1}(a) = -2 \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}} g(-2) = a \rightarrow a = -1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۰۱ ابتدا ضابطه‌ی توابع خطی f و g را می‌یابیم. برای یافتن ضابطه‌ی تابع f باید معادله‌ی خط گذرنده از نقاط $(0, 2)$ و $(5, 0)$ را به دست آوریم.

$$\frac{y}{x-5} = \frac{0-2}{5} = \frac{-2}{5} \rightarrow 5y = -2x + 10 \rightarrow y = \frac{-2}{5}x + 2 \rightarrow f(x) = \frac{2}{5}x + 2$$

برای یافتن ضابطه‌ی تابع g باید معادله‌ی خط گذرنده از نقاط $(0, -3)$ و $(2, 0)$ را به دست آوریم.

$$\frac{y}{x-2} = \frac{0+3}{2-0} = \frac{3}{2} \rightarrow 2y = 3x - 6 \rightarrow y = \frac{3}{2}x - 3 \rightarrow g(x) = \frac{3}{2}x - 3$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{2}{5}x + 2 + \frac{3}{2}x - 3 = \left(\frac{-4+15}{10}\right)x - 1 = \frac{11}{10}x - 1 \rightarrow (f+g)(x) = \frac{11}{10}x - 1$$

می‌دانیم اگر $f(a) = b$ باشد در این صورت $f^{-1}(b) = a$ است.

$$(f+g)^{-1}(0) = a \rightarrow (f+g)(a) = 0 \rightarrow \frac{11}{10}a - 1 = 0 \rightarrow \frac{11}{10}a = 1 \rightarrow a = \frac{10}{11}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۰۲ با فرض $f(x) = ax + b$ داریم:

$$4f(2x) = f(8x-1) - 5 \Rightarrow 4(2ax+b) = a(8x-1) + b - 5$$

$$\Rightarrow 8ax + 4b = 8ax - a + b - 5 \Rightarrow a + 3b = -5 \Rightarrow a = -3b - 5 \quad (I)$$

$$f^{-1}(3) = 5 \Rightarrow f(5) = 3 \Rightarrow 5a + b = 3 \quad (II)$$

از (I) و (II)، $a = 1$ و $b = -2$ به دست می‌آید.

$$\text{پس: } f(x) = x - 2, f^{-1}(m) = 2 \Rightarrow f(2) = m \Rightarrow m = 2 - 2 = 0$$



توجه کنید اگر $f(a) = b$ باشد، آن گاه $f^{-1}(b) = a$ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۰۳

$$f = \{(1, m^2 - m), (m, 4), (1, 4m^2 - 4), (5, m + 1), (0, m^2 + 2)\}$$

$$m^2 - m = 4m^2 - 4 \Rightarrow m(m^2 - 1) = 4(m^2 - 1)$$

$$\Rightarrow m(m^2 - 1) - 4(m^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (m^2 - 1)(m - 4) = 0 \Rightarrow m = \pm 1, m = 4$$

$$m = 1 \Rightarrow f = \{(1, 0), (1, 4), (5, 2), (0, 3)\} \Rightarrow \text{تابع نیست}$$

$$m = -1 \Rightarrow f = \{(1, 0), (-1, 4), (5, 0), (0, 3)\} \Rightarrow \text{یکبهیک نیست}$$

$$m = 4 \Rightarrow f = \{(1, 6), (4, 4), (5, 5), (0, 18)\} \Rightarrow \text{تابع یکبهیک است}$$

فقط به ازای $m = 4$ تابع یک به یک است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۰۴ اگر وارون تابع با محور طول در نقطه α برخورد کند این نقطه بر روی خود تابع به صورت α است پس داریم:

$$f(0) = \alpha \rightarrow 5 = \alpha$$

چون دامنه f بازه $[1, +\infty)$ است بنابراین $0 \notin D_f$ و لذا چنین نقطه‌ای وجود ندارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۰۵

$$A'(a, 0) \in f^{-1} \rightarrow (0, a) \in f \rightarrow f(0) = a \rightarrow (0)^2 + 0 + 2 = a \rightarrow a = 2$$

$$\xrightarrow{A' \text{ قرینه } A' \text{ نسبت به خط } y=x} A'(2, 0) \rightarrow A(0, 2)$$

$$\rightarrow AA' = \sqrt{(x_A - x_{A'})^2 + (y_A - y_{A'})^2} = \sqrt{(0 - 2)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۰۶ وارون هر تابع خطی، یک تابع خطی است. وارون f را حساب می‌کنیم:

$$y = ax + 2 \Rightarrow x = \frac{y - 2}{a} \xrightarrow{\text{عوض کردن } x \text{ و } y} y = \frac{x - 2}{a} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{2}{a}$$

اگر f و f^{-1} در بیش از یک نقطه برخورد داشته باشند، چون هردو توابع خطی هستند، باید برهم منطبق باشند؛ بنابراین داریم:

$$f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow ax + 2 = \frac{1}{a}x - \frac{2}{a} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{a} \\ 2 = -\frac{2}{a} \end{cases} \Rightarrow a = -1$$

پس ضابطه f و f^{-1} به صورت $f(x) = f^{-1}(x) = -x + 2$ درمی‌آید.

$$\Rightarrow f^{-1}(3) = -3 + 2 = -1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۰۷

اگر $f(a) = b$ باشد، آن گاه $f^{-1}(b) = a$ است.

$$f^{-1}(g(3a)) = 3 \Rightarrow f(3) = g(3a) \Rightarrow g(3a) = 6 \Rightarrow 3a + \sqrt{3a} = 6 *$$

$$\Rightarrow \sqrt{3a} = 6 - 3a \Rightarrow 3a = 36 - 36a + 9a^2 \Rightarrow 9a^2 - 39a + 36 = 0$$

$$\Rightarrow 3a^2 - 13a + 12 = 0 \Rightarrow (3a - 4)(a - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ a = 3 \end{cases}$$

$$a = 3 \xrightarrow{*} 9 + \sqrt{9} = 6 \Rightarrow 9 + 3 = 6 \text{ غلط} \Rightarrow a = 3 \text{ غیر قابل قبول} \Rightarrow a = \frac{4}{3}$$

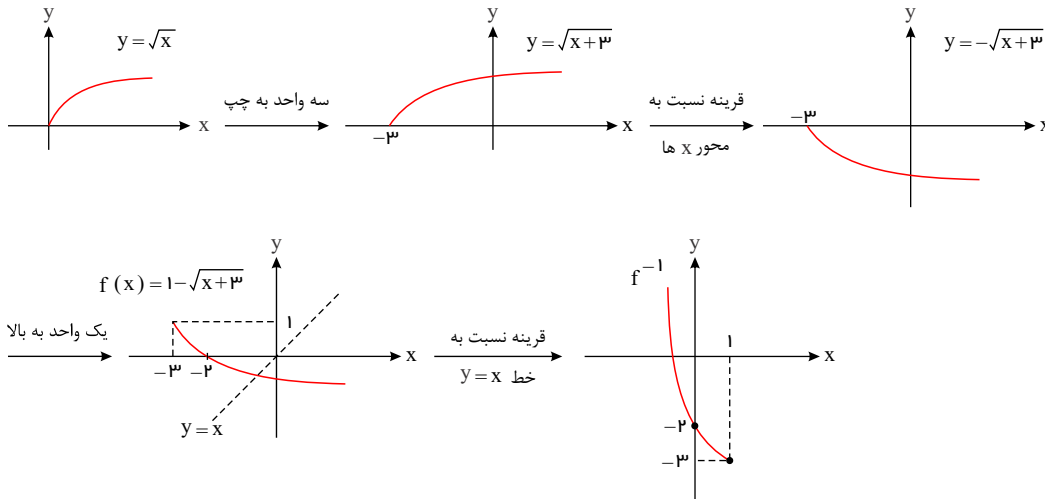
$$a = \frac{4}{3} \rightarrow 4 + \sqrt{4} = 6 \Rightarrow 4 + 2 = 6 \Rightarrow a = \frac{4}{3} \quad \text{قابل قبول}$$

۳۰۸ ابتدا تابع وارون تابع $f(x) = \sqrt[3]{4-x^3}$ را می‌یابیم. ۱ ۲ ۳ ۴

$$y = \sqrt[3]{4-x^3} \Rightarrow y^3 = 4-x^3 \Rightarrow x^3 = 4-y^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{4-y^3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{4-x^3}$$

باتوجه به این که وارون تابع f برابر با خود تابع f می‌باشد، پس معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ بی‌شمار جواب دارد.

۳۰۹ نمودار تابع $f(x) = 1 - \sqrt{x+3}$ را با استفاده از انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ رسم می‌کنیم و سپس نمودار را نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع f^{-1} به دست آید. ۱ ۲ ۳ ۴



پس f^{-1} از ناحیه اول عبور نمی‌کند.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۱۰

$$(g \circ f^{-1})(a) = 1 \rightarrow g(f^{-1}(a)) = 1$$

می‌دانیم اگر $g(m) = n$ ، آنگاه $g^{-1}(n) = m$ ، پس:

$$g(f^{-1}(a)) = 1 \rightarrow g^{-1}(1) = f^{-1}(a) \Rightarrow 0 = f^{-1}(a) \Rightarrow 2 = a$$

حال مقدار $(f \circ g)(-a)$ را با جای گذاری $a = 2$ حساب می‌کنیم:

$$(f \circ g)(-2) = f(g(-2)) = f(0) = 2$$

۳۱۱ اگر $f(a) = b$ باشد در این صورت $f^{-1}(b) = a$ و $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ است. ۱ ۲ ۳ ۴

$$(f \circ g)^{-1}(8) = a \rightarrow (f \circ g)(a) = 8 \rightarrow f(g(a)) = 8 \rightarrow \frac{1}{4}a^3 - 8 = 8$$

$$\rightarrow \frac{1}{4}a^3 = 16 \rightarrow a^3 = 64 \rightarrow a = 4$$

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(8) = b \rightarrow (g \circ f)^{-1}(8) = b \rightarrow (g \circ f)(b) = 8 \rightarrow g(f(b)) = 8$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{4}b - 8\right)^3 = 8 \rightarrow \frac{1}{4}b - 8 = 2 \rightarrow \frac{1}{4}b = 10 \rightarrow b = 40$$

$$(f \circ g)^{-1}(8) - (f^{-1} \circ g^{-1})(8) = 4 - 40 = -36 \quad \text{پس}$$

۳۱۲ می‌دانیم که اگر $f(a) = b$ باشد آن‌گاه $f^{-1}(b) = a$ است. ۱ ۲ ۳ ۴

$$f^{-1}(g(4)) = 5 \rightarrow f(5) = g(4) *$$



$$g^{-1}(f^{-1}(3)) = 4 \rightarrow g(4) = f^{-1}(3) \rightarrow f(g(4)) = 3 \rightarrow f(f(5)) = 3$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۱۳

$$f^{-1} = \{(2, 3), (1, -1), (0, 2), (-1, 0)\} \rightarrow f = \{(3, 2), (-1, 1), (2, 0), (0, -1)\}$$

توجه کنید $2f^{-1} = \{(2, 6), (1, -2), (0, 4), (-1, 0)\}$ است. (فقط مولفه های دوم دو برابر می شوند).

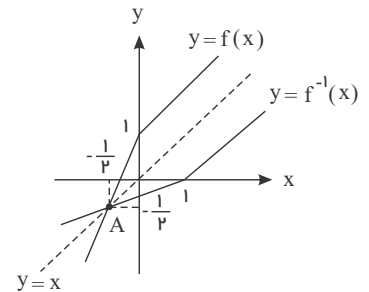
برای پیدا کردن $\frac{2f^{-1}}{f}$ زوج های مرتبی از f و f^{-1} را پیدا می کنیم که دارای مولفه های اول برابر بوده و سپس عمل تقسیم را روی مولفه های دوم آنها انجام می دهیم.

$$\frac{2f^{-1}}{f} = \left\{ \left(0, \frac{4}{-1}\right), \left(-1, \frac{0}{1}\right) \right\} = \{(0, -4), (-1, 0)\}$$

بنابراین گزینه ی چهارم، صحیح است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۱۴ تابع را دو ضابطه ای کرده و رسم می کنیم:

$$f(x) = 2x - |x| + 1 = \begin{cases} x + 1 & ; x \geq 0 \\ 3x + 1 & ; x < 0 \end{cases}$$



نمودار تابع f را نسبت به نیمساز ناحیه های اول و سوم ($y = x$) قرینه می کنیم. با توجه به شکل مشخص است که محل برخورد دو نمودار روی خط $y = x$ است و نقطه ای است که x آن منفی است، بنابراین:

$$x < 0 : 3x + 1 = x \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow a + b = -\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۱۵ ابتدا ضابطه تابع وارون f را می یابیم.

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x + 2} = y \Rightarrow 2x - 1 = xy + 2y \Rightarrow x(2 - y) = 2y + 1 \Rightarrow x = \frac{2y + 1}{2 - y}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x + 1}{2 - x}$$

حال تابع وارون را با خط $y = 3x$ قطع می دهیم:

$$\frac{2x + 1}{2 - x} = 3x \Rightarrow 2x + 1 = 6x - 3x^2 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \text{نقطه برخورد دارند. } x = 1, x = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{مجموع ضرایب} = 0$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۱۶ ابتدا وارون تابع $y = \frac{2x - 1}{x - 2}$ را می یابیم.

$$y = \frac{2x - 1}{x - 2} \Rightarrow 2x - 1 = xy - 2y \Rightarrow 2x - xy = 1 - 2y \Rightarrow x(2 - y) = 1 - 2y$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 - 2y}{2 - y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1 - 2x}{2 - x}$$

حال تابع وارون را با خط $y = -x$ قطع می دهیم.



$$\begin{cases} f^{-1}(x) = \frac{1-2x}{2-x} \Rightarrow \frac{1-2x}{2-x} = -x \Rightarrow 1-2x = -2x+x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ y = -x \end{cases}$$

$$x = 1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow A(1, -1), \quad x = -1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow B(-1, 1)$$

$$AB = \sqrt{(1+1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

۳۱۷ اگر نمودار یک تابع اکیداً صعودی و وارونش، نقطه تلاقی داشته باشند، این نقطه روی نیم‌ساز ناحیه اول و سوم ($y = x$) خواهد بود، زیرا تابع اکیداً صعودی و وارونش همواره نقطه تلاقی ندارند. پس در این نقطه خواهیم داشت:

$$f(x) = x \Rightarrow \frac{mx-2}{3} = x \xrightarrow{x=1} \frac{m-2}{3} = 1 \Rightarrow m = 5$$

در نتیجه برای محاسبه ضابطه وارون تابع $f(x) = \frac{5x-2}{3}$ داریم:

$$y = \frac{5x-2}{3} \rightarrow 3y+2 = 5x \rightarrow x = \frac{3y+2}{5} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{5}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۱۸

$$f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\} \rightarrow f^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (4, 3), (6, 4)\}$$

$$g \circ f^{-1}(x) : \begin{cases} g(f^{-1}(2)) = g(1) = \emptyset \\ g(f^{-1}(5)) = g(2) = 3 \\ g(f^{-1}(4)) = g(3) = 1 \\ g(f^{-1}(6)) = g(4) = 2 \end{cases} \rightarrow g \circ f^{-1}(x) = \{(5, 3), (4, 1), (6, 2)\}$$

$$\text{پس: } \frac{g(x)}{g \circ f^{-1}(x)} = \left\{ \left(4, \frac{2}{1}\right), \left(5, \frac{6}{3}\right) \right\} = \{(4, 2), (5, 2)\}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۱۹

$$g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\} \rightarrow g^{-1}\{(3, 2), (2, 4), (6, 5), (1, 3)\}$$

$$g^{-1} \circ f(x) : \begin{cases} g^{-1}(f(1)) = g^{-1}(2) = 4 \\ g^{-1}(f(2)) = g^{-1}(5) = \emptyset \\ g^{-1}(f(3)) = g^{-1}(4) = \emptyset \\ g^{-1}(f(4)) = g^{-1}(6) = 5 \end{cases} \rightarrow g^{-1} \circ f(x) = \{(1, 4), (4, 5)\}$$

$$\begin{cases} g^{-1} \circ f(x) = \{(1, 4), (4, 5)\} \\ f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\} \end{cases} \rightarrow g^{-1} \circ f(x) = \{(1, 4-2), (4, 5-6)\} = \{(1, 2), (4, -1)\}$$

بنابراین برد تابع به صورت $\{2, -1\}$ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۲۰

برای به دست آوردن ضابطه تابع معکوس، کافی است x را بر حسب y به دست آوریم و سپس جای x و y را عوض کنیم.

$$y = 1 - \sqrt{2x} \Rightarrow \sqrt{2x} = 1 - y \Rightarrow 2x = (1 - y)^2 \Rightarrow x = \frac{(1 - y)^2}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2$$

چون $R_f = D_{f^{-1}}$ ، باید برد f را بیابیم:

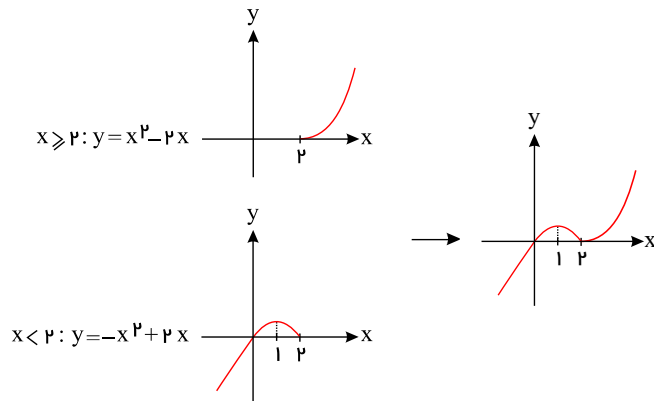
$$\sqrt{2x} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{2x} \leq 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{2x} \leq 1$$



$$R_f = (-\infty, 1] \Rightarrow D_{f^{-1}} = (-\infty, 1]$$

۳۲۱ ابتدا با تعیین علامت، قدرمطلق را برمی داریم:

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & x < 2 \end{cases}$$



پس تابع در $(1, 2)$ نزولی است. حال ضابطه معکوس را پیدا می کنیم.

$$\begin{aligned} y = -x^2 + 2x &\rightarrow y = -(x^2 - 2x) \rightarrow y = -((x-1)^2 - 1) \rightarrow y = -(x-1)^2 + 1 \\ \rightarrow (x-1)^2 &= 1-y \rightarrow x-1 = \pm \sqrt{1-y} \xrightarrow[سمت چپ مثبت است]{1 < x < 2} x-1 = \sqrt{1-y} \rightarrow x = 1 + \sqrt{1-y} \\ \rightarrow f^{-1}(x) &= 1 + \sqrt{1-x} \end{aligned}$$

روش دوم:

متوجه شدیم که تابع، $y = -x^2 + 2x$ ($1 < x < 2$) است. یک عدد دلخواه مثلاً $x = \frac{3}{2}$ در تابع قرار می دهیم.

$$x = \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{3}{4} \rightarrow \left| \frac{3}{4} \right| \in f \rightarrow \left| \frac{3}{4} \right| \in f^{-1} \rightarrow \text{فقط در گزینه سوم صدق می کند.}$$

۳۲۲ ۱ ۲ ۳ ۴

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$2x-6$		$-$	$-$	$+$
$x+1$		$-$	$+$	$+$

در ابتدا باید تکلیف قدرمطلق ها را معلوم کنیم. پس از تابع مشتق گرفته و بزرگ تر از صفر قرار دهیم.

$$x < -1 : y = -2x + 6 - (-x-1) \rightarrow y = -x + 7 \rightarrow y' = -1 < 0 \rightarrow \text{نزولی}$$

$$-1 \leq x \leq 3 : y = -2x + 6 - (x+1) \rightarrow y = -3x + 5 \rightarrow y' = -3 < 0 \rightarrow \text{نزولی}$$

$$x > 3 : y = 2x - 6 - (x+1) \rightarrow y = x - 7 \rightarrow y' = 1 > 0 \rightarrow \text{صعودی}$$

پس باید ضابطه ی معکوس تابع $y = x - 7$ را به ازای $x > 3$ به دست آوریم.

$$y = x - 7 \rightarrow x = y + 7 \rightarrow f^{-1}(x) = x + 7, \quad x > -4$$

$$\text{توجه کنید: } y = x - 7 \xrightarrow{x > 3} y > -4$$

دقت کنید $-4 > y$ برد تابع f است که در حقیقت دامنه ی تابع معکوس است.

۳۲۳ ۱ ۲ ۳ ۴ توجه کنید اگر $f(a) = b$ باشد، آن گاه $f^{-1}(b) = a$ است.



$$g(x) = 2f\left(\frac{x}{3}\right) = y \Rightarrow \begin{cases} x = g^{-1}(y) \\ f\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{y}{2} \Rightarrow \frac{x}{3} = f^{-1}\left(\frac{y}{2}\right) \Rightarrow x = 3f^{-1}\left(\frac{y}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(y) = 3f^{-1}\left(\frac{y}{2}\right) \Rightarrow g^{-1}(x) = 3f^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) = 3\left(8\left(\frac{x}{2}\right)^3 + 4\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$= 3x^3 + 6x = ax^3 + bx \Rightarrow a = 3, b = 6 \Rightarrow a + b = 9$$

می‌دانیم: $\log_b^a = k \rightarrow a = b^k$ ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۲۴

برای بدست آوردن ضابطه‌ی معکوس یک تابع، ابتدا x را برحسب y بدست می‌آوریم و سپس جای x و y را با هم عوض می‌کنیم:

$$y = \log(\sqrt{x^2 + 1} + x) \rightarrow 10^y = \sqrt{x^2 + 1} + x \rightarrow 10^y - x = \sqrt{x^2 + 1}$$

توان ۲ $\rightarrow (10^y - x)^2 = (\sqrt{x^2 + 1})^2 \rightarrow 10^{2y} + x^2 - 2x \times 10^y = x^2 + 1 \rightarrow 10^{2y} - 1 = 2x \times 10^y$

$$\rightarrow x = \frac{10^{2y} - 1}{2 \times 10^y} = \frac{10^{2y}}{2 \times 10^y} - \frac{1}{2 \times 10^y} \rightarrow x = \frac{10^y}{2} - \frac{10^{-y}}{2}$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = \frac{10^x - 10^{-x}}{2}, f^{-1}(-x) = \frac{10^{-x} - 10^x}{2}$$

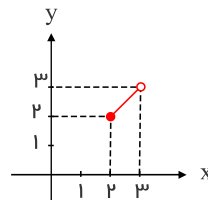
پس $f^{-1}(x) + f^{-1}(-x) = 0$ است.

می‌دانیم ترکیب هر تابع معکوس‌پذیر با تابع معکوسش، تابع همانی است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۲۵

$$f \circ f^{-1}(x) = x, \quad x \in D_{f^{-1}} \quad \text{یا} \quad x \in R_f$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = x + [x] \Rightarrow f(x) = x + 1$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow 2 \leq x + 1 < 3 \Rightarrow 2 \leq f(x) < 3 \Rightarrow R_f = [2, 3)$$



$$y = f \circ f^{-1}(x) = x, \quad x \in [2, 3) \Rightarrow y = x, \quad 2 \leq x < 3 \Rightarrow$$

برای پیدا کردن ضابطه‌ی معکوس یک تابع کافی است x را برحسب y به‌دست آوریم و در آخر جای x و y را عوض می‌کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۲۶

$$y = \underbrace{x^2 + 6x - 1}_{+10} \rightarrow y = (x + 3)^2 - 9 - 1 \rightarrow y = (x + 3)^2 - 10$$

$$\rightarrow (x + 3)^2 = y + 10 \rightarrow \underbrace{x + 3}_{-} = \pm \sqrt{y + 10} \xrightarrow{x \leq -3} x + 3 = -\sqrt{y + 10}$$

$$\rightarrow x = -3 - \sqrt{y + 10} \rightarrow f^{-1}(x) = -3 - \sqrt{x + 10}$$

از طرفی دامنه‌ی تابع معکوس همان برد تابع اصلی است.

$$y = (x + 3)^2 - 10 \xrightarrow{x \leq -3} x + 3 \leq -1 \rightarrow (x + 3)^2 \geq 1 \rightarrow (x + 3)^2 - 10 \geq -9$$

$$\rightarrow y \geq -9 \rightarrow D_{f^{-1}} = x \geq -9$$

چون دو تابع در نقطه‌ای به عرض $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ متقاطع هستند کافی است در تابع $g(x)$ به‌جای عرض، $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ قرار دهیم تا طول ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۲۷

نقطه‌ی برخورد دو تابع بدست آید.



$$\frac{1}{2\sqrt{2}} = 32^{x-1} \rightarrow \frac{1}{2 \times 2^{\frac{1}{2}}} = (2^5)^{x-1} \rightarrow 2^{-\frac{3}{2}} = 2^{5x-5} \rightarrow 5x-5 = -\frac{3}{2} \rightarrow 5x = \frac{7}{2} \rightarrow x = \frac{7}{10}$$

بنابراین محل برخورد دو تابع $(\frac{7}{10}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$ است کافی است این نقطه را در تابع f صدق دهیم تا a بدست آید.

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} = (\frac{1}{2})^{\frac{7}{10}a-1} \rightarrow \frac{1}{2 \times 2^{\frac{1}{2}}} = (2^{-1})^{\frac{7}{10}a-1} \rightarrow 2^{-\frac{3}{2}} = 2^{-\frac{7}{10}a+1}$$

$$\rightarrow -\frac{3}{2} = -\frac{7}{10}a + 1 \xrightarrow{\times 10} -15 = -7a + 10 \rightarrow -7a = -25 \rightarrow a = \frac{25}{7}$$

بنابراین $f(x) = (\frac{1}{2})^{\frac{25}{7}x-1}$ است. وقتی گفته می شود $f^{-1}(x)$ خط $x = \frac{1}{16}$ را در نقطه ای با کدام عرض قطع می کند یعنی $f^{-1}(\frac{1}{16})$ را خواسته

است و می دانیم وقتی $a \in f$ است آن گاه $b \in f^{-1}$ است کافی است مقداری از x را پیدا کنیم که به ازای آن $f(x)$ برابر با $\frac{1}{16}$ می شود.

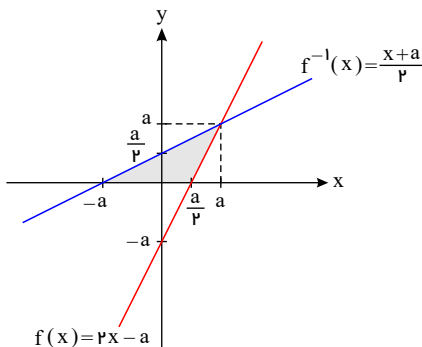
$$\frac{1}{16} = (\frac{1}{2})^{\frac{25}{7}x-1} \rightarrow 2^{-4} = 2^{-\frac{25}{7}x+1} \rightarrow -4 = -\frac{25}{7}x + 1 \rightarrow -\frac{25}{7}x = -5 \rightarrow x = \frac{7}{5}$$

ابتدا ضابطه f^{-1} را می یابیم. (۱) (۲) (۳) (۴) (۳۲۸)

$$f(x) = 2x - a \rightarrow y = 2x - a \rightarrow 2x = y + a \rightarrow x = \frac{y+a}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+a}{2}$$

اکنون نقطه تلاقی دو تابع f و f^{-1} را می یابیم.

$$f(x) = f^{-1}(x) \rightarrow 2x - a = \frac{x+a}{2} \rightarrow 4x - 2a = x + a \rightarrow 3x = 3a \rightarrow x = a \rightarrow y = a \rightarrow A \begin{vmatrix} a \\ a \end{vmatrix}$$



$$\rightarrow S = \frac{a \times \frac{3a}{2}}{2} = 27 \rightarrow \frac{3a^2}{4} = 27$$

$$\rightarrow 3a^2 = 108 \rightarrow a^2 = 36 \xrightarrow{a>0} a = 6$$

$$\rightarrow f(x) = 2x - 6 \xrightarrow{y=0} 2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3$$

ابتدا ضابطه ی تابع انتقال یافته را به دست می آوریم. (۱) (۲) (۳) (۴) (۳۲۹)

$$y = \sqrt{1-2x} \xrightarrow{\text{یک واحد به سمت چپ}} y = \sqrt{1-2(x+1)} = \sqrt{1-2x-2} = \sqrt{-2x-1}$$

$$\xrightarrow{\text{یک واحد به سمت بالا}} y = \sqrt{-2x-1} + 1$$

اکنون باید ضابطه ی معکوس این تابع را به دست آوریم. (x را بر حسب y به دست می آوریم و سپس جای x و y را عوض می کنیم.)

$$y = \sqrt{-2x-1} + 1 \rightarrow y-1 = \sqrt{-2x-1} \xrightarrow{\text{توان ۲}} (y-1)^2 = -2x-1$$

$$\rightarrow 2x = -1 - (y-1)^2 \rightarrow 2x = -1 - y^2 - 1 + 2y \rightarrow 2x = -y^2 + 2y - 2$$

$$\rightarrow x = -\frac{1}{2}y^2 + y - 1 \rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$$

می دانیم دامنه ی تابع معکوس برابر برد تابع اصلی است پس برای به دست آوردن دامنه ی تابع معکوس، کافی است برد تابع اصلی را به دست آوریم.



$$y = \sqrt{-2x-1} + 1 \rightarrow y-1 = \underbrace{\sqrt{-2x-1}}_{\text{نامنفی}} \rightarrow y-1 \geq 0 \rightarrow y \geq 1$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع معکوس به صورت $x \geq 1$ و $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$ می‌باشد.

ابتدا معکوس تابع $f(x) = 2^{x+1}$ را پیدا می‌کنیم. (۱) (۲) (۳) (۴) (۳۳۰)

$$y = 2^{x+1} \xrightarrow{\log_b^a = k \rightarrow b^k = a} x+1 = \log_2^y \rightarrow x = \log_2^y - 1 \rightarrow x = \log_2^y - \log_2^2$$

$$\rightarrow x = \log_2^{\frac{y}{2}} \rightarrow f^{-1}(x) = \log_2^{\frac{x}{2}}$$

$$g \circ f^{-1}(x) = g(f^{-1}(x)) = \sqrt{6 - 2 \log_2^{\frac{x}{2}}}$$

برای آنکه $g \circ f^{-1}(x)$ قابل انجام باشد باید جلوی لگاریتم مثبت و زیر رادیکال، بزرگتر مساوی صفر باشد.

$$\frac{x}{2} > 0 \rightarrow x > 0 (I)$$

$$6 - 2 \log_2^{\frac{x}{2}} \geq 0 \rightarrow 2 \log_2^{\frac{x}{2}} \leq 6 \rightarrow \log_2^{\frac{x}{2}} \leq 3 \xrightarrow{\log_a^A \leq m \xrightarrow{a>1} A \leq a^m} \frac{x}{2} \leq 2^3 \rightarrow \frac{x}{2} \leq 8 \rightarrow x \leq 16 (II)$$

$$I \cap II : 0 < x \leq 16 \rightarrow x \in (0, 16] \rightarrow \text{Max}(b-a) = 16 - 0 = 16$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۳۳۱)

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 1 = (x-2)^3 + 1$$

برای یافتن f^{-1} باید x را بر حسب y حل کنیم.

$$(x-2)^3 + 1 = y \Rightarrow (x-2)^3 = y-1 \Rightarrow x-2 = \sqrt[3]{y-1} \Rightarrow x = 2 + \sqrt[3]{y-1}$$

$$y = f^{-1}(x) = 2 + \sqrt[3]{x-1}$$

$$g(x) = \sqrt[3]{x} \xrightarrow{x \rightarrow x-1} y = \sqrt[3]{x-1} \rightarrow f^{-1}(x) = 2 + \sqrt[3]{x-1}$$

برای رسم f^{-1} باید نمودار $g(x) = \sqrt[3]{x}$ را یک واحد به راست و دو واحد به بالا منتقل کنیم.

تابع f را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۳۳۲)

$$f(x) = \begin{cases} (-x+1) - (-x-3) & x < -3 \\ (-x+1) - (x+3) & -3 \leq x \leq 1 \\ (x-1) - (x+3) & x > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 4 & x < -3 \\ -2x-2 & -3 \leq x \leq 1 \\ -4 & x > 1 \end{cases}$$

f در بازه $[-3, 1]$ یک به یک است. ضابطه وارون آن را در این بازه به دست می‌آوریم.

$$y = -2x - 2 \Rightarrow x = \frac{-2-y}{2} = -1 - \frac{y}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-x}{2} - 1$$

برد تابع f را در این بازه به دست می‌آوریم که همان $D_{f^{-1}}$ است:

$$-3 \leq x \leq 1 \xrightarrow{\times (-2)} -2 \leq -2x \leq 6$$

$$\xrightarrow{-2} -4 \leq -2x - 2 \leq 4 \Rightarrow -4 \leq f(x) \leq 4$$



پس ضابطه f^{-1} به صورت $f^{-1}(x) = \frac{-x}{2} - 1$ و دامنه آن $[-4, 4]$ است.

۳۳۳ (۱) (۲) (۳) (۴) واضح است که $(\delta, f^{-1}(\delta)) \in f^{-1}$ است، پس $(f^{-1}(\delta), \delta) \in f$ خواهد بود. یعنی نقطه‌ی $(f^{-1}(\delta), \delta)$ در ضابطه‌ی f صدق می‌کند. به جای $f(x)$ عدد δ و به جای x مقدار $f^{-1}(\delta)$ قرار می‌دهیم:

$$f(x) = f^{-1}(\delta) + x - 3 \Rightarrow \delta = f^{-1}(\delta) + f^{-1}(\delta) - 3 \Rightarrow f^{-1}(\delta) = 4$$

حال ضابطه‌ی تابع f را دوباره می‌نویسیم و $f(\delta)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = 4 + x - 3 \Rightarrow f(x) = x + 1 \Rightarrow f(\delta) = 5 + 1 = 6$$

۳۳۴ (۱) (۲) (۳) (۴) ابتدا قدرمطلق را از بین می‌بریم.

تابع ثابت یک به یک نمی‌باشد پس وارون پذیر نیست $x > 2 \rightarrow y = x - (x - 2) + 1 \rightarrow y = 3 \rightarrow$

$$x \leq 2 \rightarrow y = x - (-x + 2) + 1 \rightarrow y = 2x - 1$$

بنابراین تابع در فاصله‌ی $(-\infty, 2)$ وارون پذیر است.

$$y = 2x - 1 \rightarrow 2x = y + 1 \rightarrow x = \frac{y+1}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$$

$D_{f^{-1}}$ برابر برد تابع است بنابراین باید برد تابع $y = 2x - 1$ را در فاصله‌ی $(-\infty, 2)$ به دست آوریم.

$$x \leq 2 \rightarrow 2x \leq 4 \rightarrow 2x - 1 \leq 3 \rightarrow y \leq 3 \rightarrow R_f = y \leq 3 \rightarrow D_{f^{-1}} = x \leq 3$$

۳۳۵ (۱) (۲) (۳) (۴) ابتدا تابع $f(x)$ را بدون قدر مطلق نوشته و سپس ضابطه‌ی معکوس آن را به دست می‌آوریم (x را بر حسب y بدست می‌آوریم و سپس y ها را به x و x را به y تبدیل می‌کنیم).

$$x \geq 0 \rightarrow f(x) = 2x + x = 3x \rightarrow y = 3x \rightarrow x = \frac{y}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{3}, x \geq 0$$

$$x < 0 \rightarrow f(x) = 2x - x = x \rightarrow y = x \rightarrow f^{-1}(x) = x, x < 0$$

بنابراین $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$ است. اکنون باید معادله‌ی $f^{-1}(x) + 3x = 0$ را حل کنیم.

$$x \geq 0 \rightarrow f^{-1}(x) + 3x = 0 \rightarrow \frac{x}{3} + 3x = 0 \rightarrow \frac{10x}{3} = 0 \rightarrow x = 0 \quad \text{ق ق (با توجه به شرط)}$$

$$x < 0 \rightarrow f^{-1}(x) + 3x = 0 \rightarrow x + 3x = 0 \rightarrow 4x = 0 \rightarrow x = 0 \quad \text{غ ق ق (با توجه به شرط)}$$

بنابراین معادله فقط یک جواب دارد.

۳۳۶ (۱) (۲) (۳) (۴) برای پیدا کردن ضابطه وارون، x را بر حسب y به دست می‌آوریم و سپس y ها را به x و x را به y تبدیل می‌کنیم.

$$y = x^2 - 6x + 3 \rightarrow y = (x - 3)^2 - 9 + 3 \rightarrow y = (x - 3)^2 - 6 \rightarrow (x - 3)^2 = y + 6$$

$$\rightarrow x - 3 = \pm \sqrt{y + 6} \xrightarrow{x < 0} x - 3 = -\sqrt{y + 6} \rightarrow x = 3 - \sqrt{y + 6}$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x + 6}$$

دامنه تابع معکوس، برد تابع اصلی است چون طبق صورت سؤال $x < 0$ است پس $3 - \sqrt{y + 6}$ نیز باید منفی باشد.

$$3 - \sqrt{y + 6} < 0 \rightarrow \sqrt{y + 6} > 3 \rightarrow y + 6 > 9 \rightarrow y > 3$$

پس: $f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x + 6}, x > 3$

۳۳۷ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\begin{cases} f \circ f^{-1}(x) = x, & D_{f \circ f^{-1}(x)} = D_{f^{-1}(x)} = R_{f(x)} \\ f^{-1} \circ f(x) = x, & D_{f^{-1} \circ f(x)} = D_{f(x)} = R_{f^{-1}(x)} \end{cases}$$

توجه

ابتدا دامنه و برد تابع $f(x) = 4 - \sqrt{x - 3}$ را به دست می‌آوریم:

$$x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow D_f = [3, +\infty)$$

$$\sqrt{x - 3} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{x - 3} \leq 0 \Rightarrow 4 - \sqrt{x - 3} \leq 4 \Rightarrow f(x) \leq 4 \Rightarrow R_f = (-\infty, 4]$$



تابع $f^{-1} \circ f(x)$ تابع همانی بر روی دامنه تابع f می باشد یعنی:

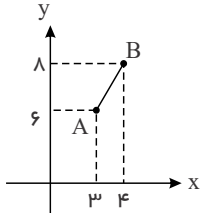
$$f^{-1} \circ f(x) = x, \quad x \in [3, +\infty)$$

تابع $f \circ f^{-1}(x)$ تابع همانی بر روی برد تابع f می باشد یعنی:

$$f \circ f^{-1}(x) = x, \quad x \in (-\infty, 4]$$

$$g(x) = f \circ f^{-1}(x) + f^{-1} \circ f(x) \Rightarrow D_g = D_{f \circ f^{-1}} \cap D_{f^{-1} \circ f} = (-\infty, 4] \cap [3, +\infty)$$

$$\Rightarrow D_g = [3, 4] \Rightarrow g(x) = x + x = 2x, \quad x \in [3, 4] \Rightarrow A \Big|_6^3, \quad B \Big|_8^4$$



$$AB = \sqrt{(4-3)^2 + (8-6)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

۳۳۸ ۱ ۲ ۳ ۴ می دانیم که $f(a) = b \rightarrow f^{-1}(b) = a$ است پس برای محاسبه $f^{-1}(2)$ کافی است در تابع اصلی به جای y و 2 بگذاریم.

$$2 = \frac{2^x + (\frac{1}{2})^x}{2} \rightarrow 2^x + \frac{1}{2^x} = 4 \xrightarrow{2^x=A} A + \frac{1}{A} = 4$$

$$\xrightarrow{\times A} A^2 + 1 = 4A \rightarrow A^2 - 4A + 1 = 0 \rightarrow \Delta = 16 - 4 = 12 \rightarrow \begin{cases} A = \frac{4 + \sqrt{12}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3} \\ A = \frac{4 - \sqrt{12}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

می دانیم که $\log_b^a c \rightarrow a = b^c$ است.

$$A = 2 + \sqrt{3} \rightarrow 2^x = 2 + \sqrt{3} \rightarrow x = \log_2^{2+\sqrt{3}}$$

$$A = 2 - \sqrt{3} \rightarrow 2^x = 2 - \sqrt{3} \rightarrow x = \log_2^{2-\sqrt{3}} \quad \text{غ ق ق}$$

توجه کنید که $\log_2^{2-\sqrt{3}}$ تقریباً معادل $\log_2^{2.3}$ است که حتماً مقدار آن منفی است و چون دامنه تابع شده بزرگتر مساوی صفر است بنابراین برد تابع معکوس نمی تواند منفی باشد.

۳۳۹ ۱ ۲ ۳ ۴ می دانیم که $f(a) = b \rightarrow f^{-1}(b) = a$ است پس برای محاسبه $f^{-1}(2)$ کافی است در تابع اصلی به جای y و 2 بگذاریم.

$$2 = \frac{2^x - (\frac{1}{2})^x}{2} \rightarrow 2^x - \frac{1}{2^x} = 4 \xrightarrow{2^x=A} A - \frac{1}{A} = 4 \xrightarrow{\times A} A^2 - 1 = 4A \rightarrow A^2 - 4A - 1 = 0 \rightarrow \Delta = 16 + 4 = 20$$

$$\rightarrow \begin{cases} A = \frac{4 + \sqrt{20}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{5}}{2} = 2 + \sqrt{5} \\ A = \frac{4 - \sqrt{20}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{5}}{2} = 2 - \sqrt{5} \end{cases}$$

می دانیم که $\log_b^a c \rightarrow a = b^c$ است.

$$A = 2 + \sqrt{5} \rightarrow 2^x = 2 + \sqrt{5} \rightarrow x = \log_2^{2+\sqrt{5}}$$

$$A = 2 - \sqrt{5} \rightarrow 2^x = \underbrace{2 - \sqrt{5}}_{\text{منفی}} \quad \text{امکان ندارد}$$



۳۴۰ می‌دانیم که $f(a) = b \rightarrow f^{-1}(b) = a$ است برای آنکه مشخص کنیم نمودار تابع $f^{-1}(x)$ ، نیمساز ناحیه چهارم $(y = -x)$ را با کدام طول قطع می‌کند باید معادله $f^{-1}(x) = -x$ را حل کنید.

$$f^{-1}(x) = -x \rightarrow f(-x) = x \rightarrow -x - \frac{2}{-x} = x \rightarrow \frac{2}{x} = 2x \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x=1 \text{ ق ق} \\ x=-1 \text{ ق ق} \end{cases}$$

توجه کنید که در ناحیه چهارم، $x > 0$ است.

۳۴۱ می‌دانیم که $f(a) = b \rightarrow f^{-1}(b) = a$ است.

$$f^{-1} \circ g^{-1}(-9) = f^{-1}(g^{-1}(-9)) = f^{-1}(21) = 6$$

توجه کنید:

$$g^{-1}(-9) = a \rightarrow g(a) = -9 \rightarrow \frac{3-a}{2} = -9 \rightarrow 3-a = -18 \rightarrow a = 21$$

$$f^{-1}(21) = b \rightarrow f(b) = 21 \rightarrow b^2 - 4b + 9 = 21 \rightarrow b^2 - 4b - 12 = 0 \rightarrow (b-6)(b+2) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} b=6 \\ b=-2 \end{cases} \text{ غ ق ق (با توجه به دامنه)}$$

۳۴۲ می‌دانیم که $f(a) = b \rightarrow f^{-1}(b) = a$ است برای آنکه مشخص کنیم نمودار تابع $f^{-1}(x)$ ، نیمساز ناحیه دوم $(y = -x)$ را با کدام طول قطع می‌کند باید معادله $f^{-1}(x) = -x$ را حل کنید.

$$f^{-1}(x) = -x \rightarrow f(-x) = x \rightarrow -x - \frac{1}{-2x} = x \rightarrow \frac{1}{2x} = 2x \rightarrow 4x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \text{ ق ق} \\ x = -\frac{1}{2} \text{ ق ق} \end{cases}$$

توجه کنید که در ناحیه دوم، $x < 0$ است.

۳۴۳ می‌دانیم که $f(a) = b \rightarrow f^{-1}(b) = a$ است.

$$g^{-1} \circ f^{-1}(20) = g^{-1}(f^{-1}(20)) = g^{-1}(16) = \frac{2}{5}$$

توجه کنید:

$$f^{-1}(20) = a \rightarrow f(a) = 20 \rightarrow a + \sqrt{a} = 20 \rightarrow a = 16$$

$$g^{-1}(16) = b \rightarrow g(b) = 16 \rightarrow \frac{9b+6}{1-b} = 16 \rightarrow 16 - 16b = 9b+6 \rightarrow 25b = 10 \rightarrow b = \frac{2}{5}$$

۳۴۴ می‌دانیم که $f(a) = b \rightarrow f^{-1}(b) = a$ است. سؤال در حقیقت $f^{-1}(6) + f^{-1}(12)$ را خواسته است.

$$f^{-1}(6) = a \rightarrow f(a) = 6 \rightarrow a + \sqrt{a} = 6 \rightarrow a = 4 \rightarrow a + b = 13$$

$$f^{-1}(12) = b \rightarrow f(b) = 12 \rightarrow b + \sqrt{b} = 12 \rightarrow b = 9$$

۳۴۵ می‌دانیم که $f(a) = b \rightarrow f^{-1}(b) = a$ است. سؤال در حقیقت $f^{-1}(3) + f^{-1}(15)$ را خواسته است.

$$f^{-1}(3) = a \rightarrow f(a) = 3 \rightarrow a + 2\sqrt{a} = 3 \rightarrow a = 1 \rightarrow a + b = 10$$

$$f^{-1}(15) = b \rightarrow f(b) = 15 \rightarrow b + 2\sqrt{b} = 15 \rightarrow b = 9$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴
۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴

۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴
۴۵	۱	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	۴
۵۱	۱	۲	۳	۴
۵۲	۱	۲	۳	۴
۵۳	۱	۲	۳	۴
۵۴	۱	۲	۳	۴
۵۵	۱	۲	۳	۴
۵۶	۱	۲	۳	۴
۵۷	۱	۲	۳	۴
۵۸	۱	۲	۳	۴
۵۹	۱	۲	۳	۴
۶۰	۱	۲	۳	۴
۶۱	۱	۲	۳	۴
۶۲	۱	۲	۳	۴
۶۳	۱	۲	۳	۴
۶۴	۱	۲	۳	۴
۶۵	۱	۲	۳	۴
۶۶	۱	۲	۳	۴
۶۷	۱	۲	۳	۴
۶۸	۱	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	۳	۴
۷۰	۱	۲	۳	۴
۷۱	۱	۲	۳	۴
۷۲	۱	۲	۳	۴

۷۳	۱	۲	۳	۴
۷۴	۱	۲	۳	۴
۷۵	۱	۲	۳	۴
۷۶	۱	۲	۳	۴
۷۷	۱	۲	۳	۴
۷۸	۱	۲	۳	۴
۷۹	۱	۲	۳	۴
۸۰	۱	۲	۳	۴
۸۱	۱	۲	۳	۴
۸۲	۱	۲	۳	۴
۸۳	۱	۲	۳	۴
۸۴	۱	۲	۳	۴
۸۵	۱	۲	۳	۴
۸۶	۱	۲	۳	۴
۸۷	۱	۲	۳	۴
۸۸	۱	۲	۳	۴
۸۹	۱	۲	۳	۴
۹۰	۱	۲	۳	۴
۹۱	۱	۲	۳	۴
۹۲	۱	۲	۳	۴
۹۳	۱	۲	۳	۴
۹۴	۱	۲	۳	۴
۹۵	۱	۲	۳	۴
۹۶	۱	۲	۳	۴
۹۷	۱	۲	۳	۴
۹۸	۱	۲	۳	۴
۹۹	۱	۲	۳	۴
۱۰۰	۱	۲	۳	۴
۱۰۱	۱	۲	۳	۴
۱۰۲	۱	۲	۳	۴
۱۰۳	۱	۲	۳	۴
۱۰۴	۱	۲	۳	۴
۱۰۵	۱	۲	۳	۴
۱۰۶	۱	۲	۳	۴
۱۰۷	۱	۲	۳	۴
۱۰۸	۱	۲	۳	۴

۱۰۹	۱	۲	۳	۴
۱۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۱۹	۱	۲	۳	۴
۱۲۰	۱	۲	۳	۴
۱۲۱	۱	۲	۳	۴
۱۲۲	۱	۲	۳	۴
۱۲۳	۱	۲	۳	۴
۱۲۴	۱	۲	۳	۴
۱۲۵	۱	۲	۳	۴
۱۲۶	۱	۲	۳	۴
۱۲۷	۱	۲	۳	۴
۱۲۸	۱	۲	۳	۴
۱۲۹	۱	۲	۳	۴
۱۳۰	۱	۲	۳	۴
۱۳۱	۱	۲	۳	۴
۱۳۲	۱	۲	۳	۴
۱۳۳	۱	۲	۳	۴
۱۳۴	۱	۲	۳	۴
۱۳۵	۱	۲	۳	۴
۱۳۶	۱	۲	۳	۴
۱۳۷	۱	۲	۳	۴
۱۳۸	۱	۲	۳	۴
۱۳۹	۱	۲	۳	۴
۱۴۰	۱	۲	۳	۴
۱۴۱	۱	۲	۳	۴
۱۴۲	۱	۲	۳	۴
۱۴۳	۱	۲	۳	۴
۱۴۴	۱	۲	۳	۴



۱۴۵	۱	۲	۳	۴
۱۴۶	۱	۲	۳	۴
۱۴۷	۱	۲	۳	۴
۱۴۸	۱	۲	۳	۴
۱۴۹	۱	۲	۳	۴
۱۵۰	۱	۲	۳	۴
۱۵۱	۱	۲	۳	۴
۱۵۲	۱	۲	۳	۴
۱۵۳	۱	۲	۳	۴
۱۵۴	۱	۲	۳	۴
۱۵۵	۱	۲	۳	۴
۱۵۶	۱	۲	۳	۴
۱۵۷	۱	۲	۳	۴
۱۵۸	۱	۲	۳	۴
۱۵۹	۱	۲	۳	۴
۱۶۰	۱	۲	۳	۴
۱۶۱	۱	۲	۳	۴
۱۶۲	۱	۲	۳	۴
۱۶۳	۱	۲	۳	۴
۱۶۴	۱	۲	۳	۴
۱۶۵	۱	۲	۳	۴
۱۶۶	۱	۲	۳	۴
۱۶۷	۱	۲	۳	۴
۱۶۸	۱	۲	۳	۴
۱۶۹	۱	۲	۳	۴
۱۷۰	۱	۲	۳	۴
۱۷۱	۱	۲	۳	۴
۱۷۲	۱	۲	۳	۴
۱۷۳	۱	۲	۳	۴
۱۷۴	۱	۲	۳	۴
۱۷۵	۱	۲	۳	۴
۱۷۶	۱	۲	۳	۴
۱۷۷	۱	۲	۳	۴
۱۷۸	۱	۲	۳	۴
۱۷۹	۱	۲	۳	۴
۱۸۰	۱	۲	۳	۴

۱۸۱	۱	۲	۳	۴
۱۸۲	۱	۲	۳	۴
۱۸۳	۱	۲	۳	۴
۱۸۴	۱	۲	۳	۴
۱۸۵	۱	۲	۳	۴
۱۸۶	۱	۲	۳	۴
۱۸۷	۱	۲	۳	۴
۱۸۸	۱	۲	۳	۴
۱۸۹	۱	۲	۳	۴
۱۹۰	۱	۲	۳	۴
۱۹۱	۱	۲	۳	۴
۱۹۲	۱	۲	۳	۴
۱۹۳	۱	۲	۳	۴
۱۹۴	۱	۲	۳	۴
۱۹۵	۱	۲	۳	۴
۱۹۶	۱	۲	۳	۴
۱۹۷	۱	۲	۳	۴
۱۹۸	۱	۲	۳	۴
۱۹۹	۱	۲	۳	۴
۲۰۰	۱	۲	۳	۴
۲۰۱	۱	۲	۳	۴
۲۰۲	۱	۲	۳	۴
۲۰۳	۱	۲	۳	۴
۲۰۴	۱	۲	۳	۴
۲۰۵	۱	۲	۳	۴
۲۰۶	۱	۲	۳	۴
۲۰۷	۱	۲	۳	۴
۲۰۸	۱	۲	۳	۴
۲۰۹	۱	۲	۳	۴
۲۱۰	۱	۲	۳	۴
۲۱۱	۱	۲	۳	۴
۲۱۲	۱	۲	۳	۴
۲۱۳	۱	۲	۳	۴
۲۱۴	۱	۲	۳	۴
۲۱۵	۱	۲	۳	۴
۲۱۶	۱	۲	۳	۴

۲۱۷	۱	۲	۳	۴
۲۱۸	۱	۲	۳	۴
۲۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۲۹	۱	۲	۳	۴
۲۳۰	۱	۲	۳	۴
۲۳۱	۱	۲	۳	۴
۲۳۲	۱	۲	۳	۴
۲۳۳	۱	۲	۳	۴
۲۳۴	۱	۲	۳	۴
۲۳۵	۱	۲	۳	۴
۲۳۶	۱	۲	۳	۴
۲۳۷	۱	۲	۳	۴
۲۳۸	۱	۲	۳	۴
۲۳۹	۱	۲	۳	۴
۲۴۰	۱	۲	۳	۴
۲۴۱	۱	۲	۳	۴
۲۴۲	۱	۲	۳	۴
۲۴۳	۱	۲	۳	۴
۲۴۴	۱	۲	۳	۴
۲۴۵	۱	۲	۳	۴
۲۴۶	۱	۲	۳	۴
۲۴۷	۱	۲	۳	۴
۲۴۸	۱	۲	۳	۴
۲۴۹	۱	۲	۳	۴
۲۵۰	۱	۲	۳	۴
۲۵۱	۱	۲	۳	۴
۲۵۲	۱	۲	۳	۴

۲۵۳	۱	۲	۳	۴
۲۵۴	۱	۲	۳	۴
۲۵۵	۱	۲	۳	۴
۲۵۶	۱	۲	۳	۴
۲۵۷	۱	۲	۳	۴
۲۵۸	۱	۲	۳	۴
۲۵۹	۱	۲	۳	۴
۲۶۰	۱	۲	۳	۴
۲۶۱	۱	۲	۳	۴
۲۶۲	۱	۲	۳	۴
۲۶۳	۱	۲	۳	۴
۲۶۴	۱	۲	۳	۴
۲۶۵	۱	۲	۳	۴
۲۶۶	۱	۲	۳	۴
۲۶۷	۱	۲	۳	۴
۲۶۸	۱	۲	۳	۴
۲۶۹	۱	۲	۳	۴
۲۷۰	۱	۲	۳	۴
۲۷۱	۱	۲	۳	۴
۲۷۲	۱	۲	۳	۴
۲۷۳	۱	۲	۳	۴
۲۷۴	۱	۲	۳	۴
۲۷۵	۱	۲	۳	۴
۲۷۶	۱	۲	۳	۴
۲۷۷	۱	۲	۳	۴
۲۷۸	۱	۲	۳	۴
۲۷۹	۱	۲	۳	۴
۲۸۰	۱	۲	۳	۴
۲۸۱	۱	۲	۳	۴
۲۸۲	۱	۲	۳	۴
۲۸۳	۱	۲	۳	۴
۲۸۴	۱	۲	۳	۴
۲۸۵	۱	۲	۳	۴
۲۸۶	۱	۲	۳	۴
۲۸۷	۱	۲	۳	۴
۲۸۸	۱	۲	۳	۴



۲۸۹	۱	۲	۳	۴
۲۹۰	۱	۲	۳	۴
۲۹۱	۱	۲	۳	۴
۲۹۲	۱	۲	۳	۴
۲۹۳	۱	۲	۳	۴
۲۹۴	۱	۲	۳	۴
۲۹۵	۱	۲	۳	۴
۲۹۶	۱	۲	۳	۴
۲۹۷	۱	۲	۳	۴
۲۹۸	۱	۲	۳	۴
۲۹۹	۱	۲	۳	۴
۳۰۰	۱	۲	۳	۴
۳۰۱	۱	۲	۳	۴
۳۰۲	۱	۲	۳	۴
۳۰۳	۱	۲	۳	۴

۳۰۴	۱	۲	۳	۴
۳۰۵	۱	۲	۳	۴
۳۰۶	۱	۲	۳	۴
۳۰۷	۱	۲	۳	۴
۳۰۸	۱	۲	۳	۴
۳۰۹	۱	۲	۳	۴
۳۱۰	۱	۲	۳	۴
۳۱۱	۱	۲	۳	۴
۳۱۲	۱	۲	۳	۴
۳۱۳	۱	۲	۳	۴
۳۱۴	۱	۲	۳	۴
۳۱۵	۱	۲	۳	۴
۳۱۶	۱	۲	۳	۴
۳۱۷	۱	۲	۳	۴
۳۱۸	۱	۲	۳	۴

۳۱۹	۱	۲	۳	۴
۳۲۰	۱	۲	۳	۴
۳۲۱	۱	۲	۳	۴
۳۲۲	۱	۲	۳	۴
۳۲۳	۱	۲	۳	۴
۳۲۴	۱	۲	۳	۴
۳۲۵	۱	۲	۳	۴
۳۲۶	۱	۲	۳	۴
۳۲۷	۱	۲	۳	۴
۳۲۸	۱	۲	۳	۴
۳۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۳۲	۱	۲	۳	۴
۳۳۳	۱	۲	۳	۴

۳۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۳۹	۱	۲	۳	۴
۳۴۰	۱	۲	۳	۴
۳۴۱	۱	۲	۳	۴
۳۴۲	۱	۲	۳	۴
۳۴۳	۱	۲	۳	۴
۳۴۴	۱	۲	۳	۴
۳۴۵	۱	۲	۳	۴